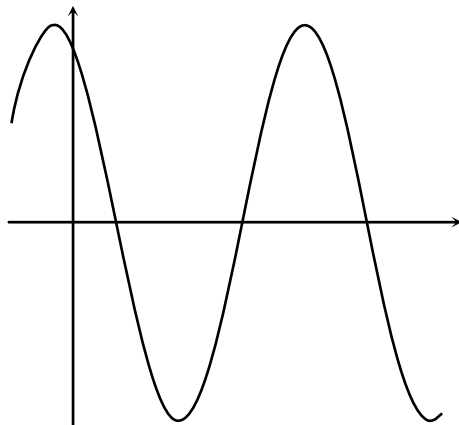


## MATEMÁTICA

01. Considere a função  $f$ , com domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, dada por  $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ , que tem parte de seu gráfico esboçado a seguir.



Análise a veracidade das afirmações seguintes acerca de  $f$ :

- 0-0)  $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi/6)$ , para todo  $x$  real.
- 1-1)  $f$  é periódica com período  $2\pi$ .
- 2-2) As raízes de  $f(x)$  são  $-\pi/6 + 2k\pi$ , com  $k$  inteiro.
- 3-3)  $f(x) \geq -\sqrt{3}$ , para todo  $x$  real.
- 4-4)  $f(x) \leq 2$ , para todo  $x$  real.

Resposta: FVFFV

Justificativa:

Temos  $f(x) = 2[(\sqrt{3}/2) \cos x - \sin x(1/2)] = 2 \cos(\pi/6 + x)$  e a alternativa 0-0) é falsa. A proposição 1-1) é verdadeira, pois as funções seno e cosseno são periódicas com período  $2\pi$ . As raízes de  $f(x)$  são  $-\pi/6 + \pi/2 + k\pi = \pi/3 + k\pi$ , com  $k$  inteiro, logo 2-2) é falsa. Temos  $f(x) = 2 \cos(x + \pi/6)$  e os valores de  $f$  variam de  $-2$  a  $2$ , logo 3-3) é falsa e 4-4) é verdadeira.

02. O Jogo do Nim é um jogo de estratégia entre dois jogadores com palitos dispostos em três linhas. A quantidade de palitos por linha é estabelecida no início do jogo. Cada jogador retira, na sua vez de jogar, uma quantidade qualquer de palitos de uma só linha (pelo menos um palito). Vence o jogo aquele que retirar o último grupo de palitos. João e Maria estão jogando o Jogo do Nim com 3 palitos por linha, e Maria começa retirando os três palitos de alguma linha. A propósito, analise as seguintes afirmações:

- 0-0) Se João retirar apenas um palito de outra linha, ele com certeza vence o jogo.
- 1-1) Se João retirar dois palitos de outra linha, ele com certeza vence o jogo.
- 2-2) Se João retirar todos os palitos de outra linha, ele só vence se Maria permitir.
- 3-3) Independentemente da jogada de João, Maria vencerá se quiser.
- 4-4) Com a configuração inicial de 3 palitos por linha, a única jogada inicial que garante a vitória é a usada por Maria.

Resposta: FFVVV

Justificativa:

Se João retira todos os palitos de uma linha, Maria vence retirando os últimos palitos da outra linha. Se João retira um ou dois palitos de uma linha, Maria faz a mesma jogada na outra linha e vence o jogo repetindo as jogadas de João. Se Maria começasse o jogo deixando algum palito na linha, João poderia inverter a situação retirando os palitos restantes nesta linha.

- 03.** Antônio nasceu no século vinte, e seu pai, que tinha 30 anos quando Antônio nasceu, tinha  $x$  anos no ano  $x^2$ . Considerando estas informações, analise as afirmações seguintes:

- 0-0) O pai de Antônio nasceu no século vinte.
- 1-1) O pai de Antônio nasceu em 1936.
- 2-2) O pai de Antônio tinha 44 anos em 1936.
- 3-3) Antônio nasceu em 1922.
- 4-4) Antônio nasceu em 1936.

Resposta: FFVVF

Justificativa:

Temos  $4^2 = 16$  e  $5^2 = 25$ ; portanto,  $x$  deve estar entre 40 e 50. Testando:  $41^2 = 1681$ ,  $42^2 = 1764$ ,  $43^2 = 1849$ ,  $44^2 = 1936$  e  $45^2 = 2025$ . Então,  $x = 43$  ou  $x = 44$  ou  $x = 45$ .

Se  $x = 43$ ,  $x^2 = 1849$ , então, o pai de Antônio nasceu em 1806, e Antônio em 1836.

Se  $x = 44$ ,  $x^2 = 1936$ , então, o pai de Antônio nasceu em 1892, e Antônio, em 1922.

Se  $x = 45$ ,  $x^2 = 2025$  então o pai de Antônio nasceu em 1980 e Antônio em 2010.

- 04.** Na nota de compra de certo produto aparecem o número de unidades adquiridas e o preço total pago. O número de unidades foi 72, mas dois dígitos do preço pago estão ilegíveis e aparece R\$ \_13,3\_. Determine os dígitos ilegíveis e assinale seu produto.

Resposta: 30

Justificativa:

O número \_133\_ é divisível por 8; logo, o número 33\_ também é divisível por 8, e o último dígito da direita é 6. Agora, o número \_1336 é divisível por 9, e o primeiro dígito é 5, pois a soma dos dígitos é divisível por 9. A resposta é  $6.5 = 30$ .

- 05.** Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  na construção de três tipos de carros,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ . A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está na tabela a seguir:

|       | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2     | 3     | 4     |
| $A_2$ | 1     | 1     | 2     |
| $A_3$ | 3     | 2     | 1     |

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo  $A_1$ , 11 toneladas do tipo  $A_2$  e 19 toneladas do tipo  $A_3$ , qual o total de carros construídos (dos tipos  $C_1$ ,  $C_2$  ou  $C_3$ )?

Resposta: 9

Justificativa:

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  os respectivos números de carros dos tipos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  que foram construídos. Temos o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 26 \\ x + y + 2z = 11 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$$

Subtraindo da primeira igualdade o dobro da segunda, obtemos  $y = 26 - 22 = 4$ . Substituindo  $y$  na segunda e terceira equações, obtemos  $x + 2z = 7$  e  $3x + z = 11$ . Segue que  $z = 2$  e  $x = 3$ . Temos  $x + y + z = 9$ .

**06.** Se as raízes da equação

$$x^3 - 7x^2 - 28x + k = 0$$

são termos de uma progressão geométrica, determine e assinale o valor do termo constante  $k$ .

Resposta: 64

Justificativa:

Sejam  $a/q$ ,  $a$  e  $aq$  os termos da progressão geométrica. Das relações entre os coeficientes e as raízes da equação temos  $a/q + a + aq = 7$ ,  $a/q \cdot a + a/q \cdot aq + a \cdot aq = -28$  e  $a/q \cdot a \cdot aq = a^3 = -k$ . Da primeira igualdade segue que  $a(1/q + 1 + q) = 7$  e da segunda temos  $a^2(1/q + 1 + q) = -28$ . Daí,  $a = -28/7 = -4$  e  $k = 64$ . Observe que a razão da progressão geométrica é raiz da equação  $q^2 + 11q/4 + 1 = 0$  e vale  $(-11 + \sqrt{57})/8$  ou  $(-11 - \sqrt{57})/8$ .

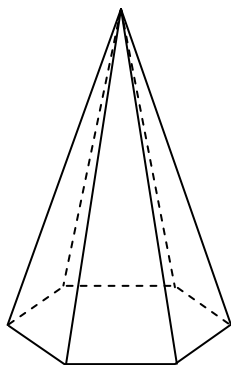
**07.** O proprietário de uma loja comprou certo número de artigos, todos custando o mesmo valor, por R\$ 1.200,00. Cinco dos artigos estavam danificados e não puderam ser comercializados; os demais foram vendidos com lucro de R\$ 10,00 por unidade. Se o lucro total do proprietário com a compra e a venda dos artigos foi de R\$ 450,00, quantos foram os artigos comprados inicialmente?

Resposta: 60

Justificativa:

Seja  $x$  o número de artigos comprados inicialmente. O preço de custo de cada artigo foi  $1200/x$ , e o valor faturado com a venda dos artigos não danificados foi  $(1200/x + 10)(x - 5)$ . Temos  $(1200/x + 10)(x - 5) = 1650$ . Simplificando, obtemos  $(120 + x)(x - 5) = 165x$  ou  $x^2 - 50x - 600 = 0$  e  $x = 60$  ou  $-10$ , sendo 60 o valor aceitável.

**08.** Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em  $\text{cm}^3$ . Dado: use a aproximação  $\sqrt{3} \approx 1,73$ .

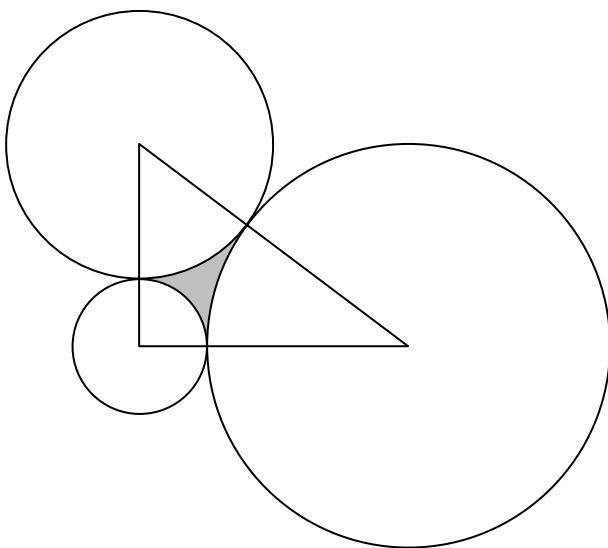


Resposta: 83

Justificativa:

Se o lado da base mede  $a$ , temos que a área da base mede  $3a^2\sqrt{3}/2$ . Se  $h$  é a altura dos triângulos das faces laterais temos que a área lateral mede  $6ah/2 = 3ah$ . Da condição dada no problema, temos que  $3ah = 2.3 a^2\sqrt{3}/2$  e  $h = a\sqrt{3}$ . Também temos  $h^2 = (a\sqrt{3}/2)^2 + 6^2$  e segue que  $3.3a^2/4 = 36$  e  $a = 4$ . O volume da pirâmide é  $(3.4^2\sqrt{3}/2)6/3 = 48\sqrt{3} \approx 83,04 \text{ cm}^3$ .

- 09.** Na ilustração a seguir, temos três circunferências tangentes duas a duas e com centros nos vértices de um triângulo com lados medindo 6 cm, 8 cm e 10 cm.



Calcule a área  $A$  da região do triângulo, em  $\text{cm}^2$ , limitada pelas três circunferências e indique  $10A$ .

Dado: use as aproximações  $\pi \approx 3,14$  e  $\arctg 0,75 \approx 0,64$ .

Resposta: 19

O triângulo em questão é retângulo. Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os raios das circunferências, em ordem crescente, temos  $a + b = 6$ ,  $a + c = 8$  e  $b + c = 10$ . Segue que  $a + b + c = 12$  e  $a = 12 - 10 = 2$  cm,  $b = 12 - 8 = 4$  cm,  $c = 12 - 6 = 6$  cm. As circunferências têm raios 2 cm, 4 cm e 6 cm. O ângulo agudo do triângulo, oposto ao cateto que mede 6 cm, tem tangente  $6/8 = 0,75$  e mede  $0,64$  radianos. O outro ângulo agudo mede  $3,14/2 - 0,64 = 0,93$  radianos. A área procurada mede  $A = 6.8/2 - 0,64.36/2 - 0,93.16/2 - 3,14.4/4 = 1,9$  cm<sup>2</sup>.

10. A representação geométrica dos números complexos  $z$  que satisfazem a igualdade  $2|z - i| = |z - 2|$  formam uma circunferência com raio  $r$  e centro no ponto com coordenadas  $(a, b)$ . Calcule  $r$ ,  $a$  e  $b$  e assinale  $9(a^2 + b^2 + r^2)$ .

Resposta: 40

Justificativa:

Escrevendo  $z = x + yi$ , a igualdade dada se escreve como  $4(x^2 + (y - 1)^2) = (x - 2)^2 + y^2$  que se simplifica como  $3x^2 + 3y^2 + 4x - 8y = 0$  ou  $(x + 2/3)^2 + (y - 4/3)^2 = 20/9$ , a equação da circunferência com centro no ponto  $(-2/3, 4/3)$  e raio  $2\sqrt{5}/3$ . Temos  $9(a^2 + b^2 + r^2) = 4 + 16 + 20 = 40$ .

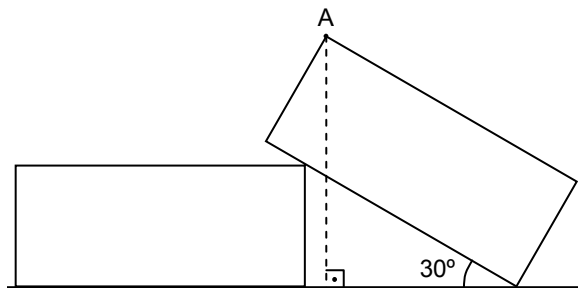
11. Seja  $(a, b)$  o ortocentro do triângulo com vértices nos pontos com coordenadas  $(5, 1)$ ,  $(7, 2)$  e  $(1, 3)$ . Assinale  $4a - 2b$ .

Resposta: 24

Justificativa:

A altura relativa ao vértice  $(7, 2)$  tem equação  $y - 2 = 2(x - 7)$ , e a altura relativa ao vértice  $(5, 1)$  tem equação  $y - 1 = 6(x - 5)$ . Subtraindo as duas igualdades, obtemos  $-1 = -4x + 16$  e  $x = 17/4$ ,  $y = 2 + 2.(-11/4) = -7/2$ .

12. Na ilustração abaixo, temos dois retângulos congruentes com base medindo 12 cm, e altura 5 cm. Qual o inteiro mais próximo da distância, em cm, do ponto A até a horizontal? Dado: use a aproximação  $\sqrt{3} \approx 1,73$ .

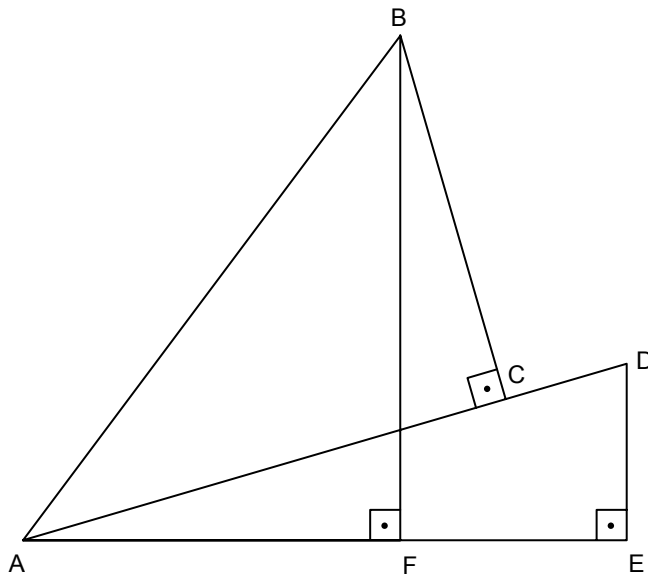


Resposta: 10

Justificativa:

A diagonal do retângulo mede  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$  cm. A altura do ponto A é  $13\sin(\alpha + 30^\circ) = 13(\sin \alpha \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha)$ , com  $\alpha$  sendo o ângulo entre a diagonal do retângulo e o lado que mede 13 cm. Temos  $\sin \alpha = 5/13$  e  $\cos \alpha = 12/13$ . Segue que a altura do ponto A é  $5 \cdot \sqrt{3}/2 + 1/2 \cdot 12 \approx 5,173/2 + 6 = 10,325$  cm.

13. Na figura abaixo  $AB = AD = 25$ ,  $BC = 15$  e  $DE = 7$ . Os ângulos DEA, BCA e BFA são retos. Determine e assinale AF.



Resposta: 15

Justificativa:

Temos  $AC = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$  e  $AE = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ . Seja G o ponto de interseção de AC e BF. São semelhantes os triângulos GCB, GFA e DEA. Então,  $CG = 35/8$  e  $BG = 25/8$ ; portanto,  $AG = AC - 35/8 = 20 - 35/8 = 125/8 = BG$  e  $AF = BC = 15$ .

14. Um escritório tem 7 copiadoras e 8 funcionários que podem operá-las. Calcule o número m de maneiras de se copiar simultaneamente (em máquinas distintas, sendo operadas por funcionários diferentes) 5 trabalhos idênticos neste escritório. Indique a soma dos dígitos de m.

Resposta: 09

Justificativa:

Podemos escolher, ordenadamente, os cinco funcionários de 8.7.6.5.4 maneiras e as 5 copiadoras de 7.5.4.3.2 maneiras. Uma vez que não importa qual trabalho é feito em qual copiadora, temos um total de  $m = (8.7.6.5.4)(7.6.5.4.3)/(5.4.3.2.1) = 141120$  maneiras diferentes de se executar o trabalho.

- 15.** Um construtor compra 60% das suas telhas da Companhia A e o restante da Companhia B. Suponha que 96% das telhas compradas de A são entregues sem defeito, e o mesmo ocorre com 98% das telhas de B. Se uma telha foi entregue com defeito, calcule a probabilidade percentual  $p\%$  de ter sido entregue pela Companhia A. Indique  $p$ .

Resposta: 75

Justificativa:

Do total de telhas, são entregues com defeito  $0,04.60 + 0,02.40 = 3,2\%$ , e a probabilidade de uma telha entregue com defeito ser da Companhia A é de  $2,4/3,2 = 3/4 = 75\%$ .

- 16.** No desenvolvimento binomial de  $(1 + 1/3)^{10}$ , quantas parcelas são números inteiros?

Resposta: 02

Justificativa:

A maior potência de 3 que divide  $10!$  é  $3^4$ , os cinco primeiros coeficientes binomiais são 1, 10, 45, 120 e 210. Somente  $1/3^0$  e  $45/3^2$  são inteiros.