

Gabarito – Prova de 1º e 2º anos

1. Cada marca após uma volta completa percorre uma distância $d_i = 2\pi R_i + 2L$, ou seja:

$$d_1 = 2\pi R + 6\pi R = 8\pi R \quad d_2 = 10\pi R \quad \text{e} \quad d_3 = 12\pi R$$

Se v_i é a velocidade de cada marca, uma volta completa é efetuada no tempo $t_i = \frac{d_i}{v_i}$.

As marcas irão coincidir com a referência O quando cada uma percorrer N_i voltas completas, de modo que isto ocorrerá no instante:

$$t = \frac{N_1 d_1}{v_1} = \frac{N_2 d_2}{v_2} = \frac{N_3 d_3}{v_3}$$

Como $v_i = \frac{2\pi R_i}{T_0}$, teremos

$$v_1 = \frac{2\pi R}{T_0}, \quad v_2 = \frac{2\pi(2R)}{T_0} = 2v_1 \quad \text{e} \quad v_3 = \frac{2\pi(3R)}{T_0} = 3v_1$$

$$\text{Logo: } \frac{N_1 d_1}{v_1} = \frac{N_2 d_2}{2v_1} = \frac{N_3 d_3}{3v_1}$$

$$N_1(8\pi R) = \frac{N_2(10\pi R)}{2} = \frac{N_3(12\pi R)}{3} \Rightarrow 8N_1 = 5N_2 = 4N_3 \quad (1)$$

Como os N_i são números inteiros, devemos calcular o MMC (pois, o que se pede é o menor tempo) entre 4, 5 e 8. Este valor é 40, de modo que obtemos:

$$N_1 = 5 \quad N_2 = 8 \quad \text{e} \quad N_3 = 10$$

Para achar o instante onde as marcas irão coincidir pela primeira vez, fazemos:

$$v_1 t = N_1 d_1 \quad \frac{2\pi R}{T_0} t = N_1 8\pi R \quad (2)$$

$$t = 4N_1 T_0 = 20T_0$$

Observações

a) Podemos testar este resultado para outras correias

$$\text{Para correia 2: } v_2 t = N_2 d_2 \Rightarrow \frac{2\pi(2R)}{T_0} t = N_2 10\pi R \Rightarrow t = \frac{5}{2} N_2 T_0 = 20T_0$$

$$\text{Para correia 3: } v_3 t = N_3 d_3 \Rightarrow \frac{2\pi(3R)}{T_0} t = N_3 12\pi R \Rightarrow t = 2N_3 T_0 = 20T_0$$

b) Por um engano da comissão de provas, na figura 1 ao invés da distância entre os centros ser $L = 3\pi R$ está escrito $L = 3R$. Se este valor for considerado, a equação (1) será reescrita como:

$$(2\pi + 6)N_1 = (2\pi + 3)N_2 = (2\pi + 2)N_3$$

Neste caso não existem N_1 , N_2 e N_3 **inteiros** que satisfazem esta relação. Isto significa que as 3 marcas não irão se alinhar simultaneamente com a referência O.

c) Segundo o enunciado, o que se pede é o menor tempo para que “as três marcas estejam alinhadas **novamente** com a referência O”. O termo “novamente” foi aqui utilizado para se dar uma idéia de repetição, ou seja, que as três marcas repitam a configuração inicial. Apesar disto é ainda possível a interpretação de que as três marcas irão simplesmente se alinhar com O independente se estejam na configuração inicial ou na parte de baixo (isto é, no lado oposto da posição inicial). Se isto for considerado, a relação (1) ficaria

$$8N'_1 = 5N'_2 = 4N'_3$$

onde os N'_i são número inteiros de **semi-voltas**.

Obtém-se, então,

$$N'_1 = 5 \quad N'_2 = 8 \quad \text{e} \quad N'_3 = 10$$

Este resultado mostra que a correia interna dará $2 \frac{1}{2}$ voltas enquanto as outras darão 4 e 5 voltas completas. Assim, a marca da correia interna estará na parte de baixo, enquanto as outras estarão na parte de cima.

A equação (2) será modificada para:

$$v_1 t = N'_1 \frac{d_1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi R}{T_0} t = N'_1 4\pi R$$

O que nos leva a:

$$t = 2N'_1 T_0 = 10T_0$$

2. Usando a equação das lentes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (1)$$

$p = 45 \text{ cm}$ e $q = 360 \text{ cm}$, pois a imagem é real, obtemos

$$f = 40 \text{ cm}$$

Para uma lente de índice de refração n imersa em um meio de índice de refração n_o , a equação dos fabricantes de lentes nos fornece:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n - n_o)}{n_o} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

Para uma lente biconvexa devemos ter $R_1 = R_2 = R$. Para o experimento realizado no ar, obtemos

$$\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R} \Rightarrow R = 2f(n-1) = 80(n-1) \quad (3)$$

Quando o experimento é feito dentro do líquido, a imagem para $p = 45 \text{ cm}$ é virtual. Logo devemos ter

$$q = -30 \text{ cm}.$$

Usando (1) chegamos a $f' = -90 \text{ cm}$.

Usando (2), mas com $n_o = n_\ell$, chegamos a:

$$\frac{1}{f'} = \frac{2(n - n_\ell)}{n_\ell R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2f'(n - n_\ell)}{n_\ell}$$

$$\text{Como } n_\ell = 1,5 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2(-90)(n - 1,5)}{1,5} = 120(1,5 - n)$$

Comparando com (3)

$$80(n - 1) = 120(1,5 - n)$$

Resulta $n = 1,3$

Substituindo em (3) obtemos $R = 24 \text{ cm}$

3. Após 50 minutos, temos no recipiente água a 0°C . Verificamos que esta massa de água aumenta a temperatura de 2°C em 10 min (a variação de 2°C é igual à variação de 2 K). Isto significa que recebeu uma quantidade de calor:

$$Q = mc\Delta T = 10 \times 4200 \times 2 = 84000 \text{ J}$$

Este fato ocorre em 10 min, ou 600 segundos. A potência de fornecimento de energia é de:

$$P = \frac{84000}{600} = 140 \text{ J/s}$$

Para o gelo ser derretido ele precisou receber energia durante 50 min, ou 3000 s então ele recebeu uma quantidade de energia igual a:

$$\mathfrak{S} = 140 \times 3000 = 420000 \text{ J}$$

Sendo o calor latente de fusão do gelo $3,0 \times 10^5 \text{ J/kg}$, então a massa de gelo era:

$$m = \frac{4,2 \times 10^5}{3,0 \times 10^5} = 1,4 \text{ kg}$$

4. Na água do mar, cuja densidade é ρ_m , o equilíbrio será atingido quando a força de empuxo for igual à força peso total. Se M é a massa total (da plataforma e dos equipamentos, pessoas, etc.) e se h_m é a altura da parte submersa da plataforma, então:

$$E = P \quad \Rightarrow \quad \rho_m V_m g = M g \quad \Rightarrow \quad \rho_m h_m A = M$$

$$h_m = \frac{M}{\rho_m A} \quad (1)$$

Na água doce (densidade ρ_d), agora com a ajuda dos balões (flutuando no ar) e o palco na linha de segurança, a equação no equilíbrio será:

$$4E_b + E_d = Mg,$$

onde E_b é o empuxo exercido sobre cada balão, E_d é o empuxo que a água doce provoca sobre o palco e foram ignoradas as massas dos balões, das cordas e do próprio gás. Assim, se V_b é o volume de cada balão, então

$$4\rho_{ar} V_b g = Mg - \rho_d h_m Ag$$

Usando (1),

$$4\rho_{ar} V_b = M - \rho_d \frac{M}{\rho_m} = \frac{\rho_m - \rho_d}{\rho_m} M \quad (2)$$

Sabendo-se que $\rho_m = 1,03\rho_m$, então:

$$V_b = 0,03 \frac{\rho_d M}{4\rho_m \rho_{ar}} = 0,03 \frac{M}{4 \times 1,03 \times 1,2}$$

$$\text{Resulta } V_b = 38,8 \text{ m}^3$$

Observação: Isto corresponde a um balão esférico de aproximadamente 4,2 metros de diâmetro. Caso fossemos levar em conta as massas dos balões e cordas (m_b), além do próprio gás a equação (2) seria modificada para:

$$(\rho_{ar} - \rho_{gas}) V_b g = 0,03 \frac{\rho_d M}{4\rho_m} g + m_b g$$

$$V_b = 0,03 \frac{\rho_d M}{4\rho_m (\rho_{ar} - \rho_{gas})} + \frac{m_b}{(\rho_{ar} - \rho_{gas})}$$

Evidentemente este volume será maior do que o encontrado anteriormente.

5. a) Seja uma partícula se movendo em uma trajetória circular de raio r e com velocidade angular ω . Sua velocidade tangencial será dada por $v = \omega r$

Assim, para cada partícula situada na circunferência de raio r sua energia cinética é dada por:

$$E_c(r) = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2}{2} \omega^2$$

Para as partículas situadas na circunferência de raio $2r$, devemos ter:

$$E_c(2r) = \frac{m\omega^2(2r)^2}{2} = 2mr^2 \omega^2$$

A energia total será:

$$E_{rot} = 8E_c(r) + 8E_c(2r)$$

$$E_{rot} = 20mr^2 \omega^2$$

Comparando com $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$, chegamos a:

$$I = 40mr^2 = 10mR^2$$

Mas $M = 16m$, logo:

$$I = \frac{5}{8}MR^2$$

b) As quatro esferas situadas sobre o eixo de rotação terão energia cinética nulas. Os raios de rotação dependerão da posição de cada esfera, de modo que as velocidades tangenciais serão dadas por:

$$v = \omega r \cos \theta$$

A energia cinética de cada partícula pode ser escrita como:

$$E_c(r, \theta) = \frac{m(r \cos \theta)^2}{2} \omega^2$$

A energia total será, portanto:

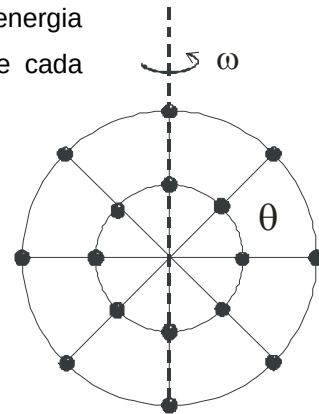
$$E_{rot} = 4E_c(r, 45^\circ) + 4E_c(2r, 45^\circ) + 2E_c(r, 0^\circ) + 2E_c(2r, 0^\circ)$$

$$E_{rot} = \left[4m(r \cos 45^\circ)^2 + 4m(2r \cos 45^\circ)^2 + 2m(r \cos 0^\circ)^2 + 2m(2r \cos 0^\circ)^2 \right] \frac{\omega^2}{2}$$

Resulta:

$$E = 20mr^2 \frac{\omega^2}{2}$$

$$I = 20mr^2 = 5mR^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{5}{16}MR^2$$



6. Inicialmente o movimento do helicóptero está sendo observado em dois referenciais A e B, de forma que suas velocidades são respectivamente v_{hA} e v_{hB} .

Sendo v a velocidade do referencial B em relação ao referencial A, a transformação de velocidades nos leva a:

$$v_{hB} = v_{hA} - v.$$

$$v = v_{hA} - v_{hB}$$

Como $v_{hA} = 100 \text{ km/h}$ e $v_{hB} = 150 \text{ km/h}$, logo

$v = -50 \text{ km/h}$, onde o sinal negativo indica que o movimento de B está no sentido oposto ao de A.

Como estamos analisando o movimento no referencial A (onde ele está “parado”), o carro B dele se aproxima com esta velocidade. Como em $t = 0$ a distância é de $\Delta s = 10 \text{ km}$, os carros

se encontram no instante $t = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ h} = 12 \text{ min}$.

Solução alternativa:

Podemos resolver esta questão no referencial do helicóptero. Neste referencial as velocidades de A e B serão respectivamente $v_A = -100 \text{ km/h}$ e $v_B = -150 \text{ km/h}$, onde o sinal negativo

indica que, para o piloto do helicóptero, ambos os carros se movem “para trás”, ou seja, no sentido oposto ao seu movimento. As equações horárias de A e B serão:

$$s_A = s_o + v_A t = s_o - 100t$$

$$s_B = s_o + 10 + v_B t = s_o + 10 - 150t$$

O instante do encontro ocorrerá quando $s_A = s_B$, isto é:

$$s_o - 100t = s_o + 10 - 150t, \text{ o que nos leva a:}$$

$$t = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ h} = 12 \text{ min}$$

7. O quadro está em queda livre assim como o pêndulo, portanto, relativamente ao quadro o pêndulo mover-se-á como se não existisse a gravidade. Isto fará com que ele gire com velocidade angular constante.

Esta velocidade é:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2,0}{0,4} = 5,0 \text{ rad/s}$$

O tempo para voltar à mesma posição é T e, sendo $\omega = \frac{2\pi}{T}$, então:

$$T = \frac{2\pi}{5} = 0,4\pi \text{ s}$$

8. Para um espelho, a distância focal é dada por $f = \frac{R}{2}$, onde R é o seu raio de curvatura.

Para a face côncava, por convenção adotamos $R = +60 \text{ cm}$, de modo que sua distância focal será $f_1 = 30 \text{ cm}$.

Analogamente, para a face convexa teremos $f_2 = -30 \text{ cm}$.

Da equação dos pontos conjugados dos espelhos tem-se que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{pf}{p-f} \quad (1)$$

Por outro lado o aumento é dado por $M = -\frac{q}{p}$.

$$\text{Usando (1) obtemos: } M = \frac{f}{f-p}$$

Se h e h' representam as alturas do objeto e de sua imagem, o aumento é dado por:

$$M = \frac{h'}{h} = \frac{f}{f-p}$$

$$\text{Segue-se que } h' = \frac{hf}{f-p}$$

Para o espelho côncavo, $h'_1 = \frac{h f_1}{f_1 - p} = \frac{30h}{30 - p}$.

Para o espelho convexo, $h'_2 = \frac{h f_2}{f_2 - p} = \frac{h(-30)}{(-30) - p} = \frac{30h}{30 + p}$.

Do enunciado $h'_1 = 2h'_2$ (pois ambas as imagens são direitas). Logo

$$\frac{30h}{30 - p} = 2 \frac{30h}{30 + p}$$

Resulta $p = 10 \text{ cm}$

9. O intervalo de tempo para o homem deixar uma extremidade do tronco e alcançar a outra extremidade é facilmente calculada.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{18}{3,0} = 6,0 \text{ s}$$

Desconsiderando a resistência da água sobre o tronco, a força que existe no sistema é interna e, portanto, há conservação da quantidade de movimento. Para um observador na borda do lago:

$$\vec{q}_{\text{antes}} = \vec{q}_{\text{depois}}$$

$$(m_h + m_t) V_t = m_t v_t + m_h v'_h$$

$$\text{onde } v'_h = v_h + v_t = 3 + v_t$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$(80 + 400)4 = 400 v_t + 80(3 + v_t) \quad (1)$$

$$v_t = 3,5 \text{ m/s}$$

Distância percorrida pelo tronco para o observador na borda do lago:

$$d = v_t \Delta t = 21 \text{ m}$$

Observações:

a) Este problema pode ser resolvido usando-se o conceito de centro de massa. Seja:

x_{cm} - posição do centro de massa do sistema tronco + homem

x_t - posição do centro de massa do tronco

x_h - posição do centro de massa do homem

Em relação à margem a posição do centro de massa (CM) será:

$$x_{cm} = \frac{m_t x_t + m_h x_h}{m_t + m_h}$$

Logo, a velocidade do CM em relação à margem do lago será:

$$v_{cm} = \frac{m_t v_t + m_h v_h}{m_t + m_h} \Rightarrow (m_t + m_h) v_{cm} = m_t v_t + m_h v'_h$$

Note que aqui v'_h representa a velocidade do centro de massa do homem em relação à margem, de modo que $v'_h = 3 + v_t$.

Logo: $(m_t + m_h)v_{cm} = m_tv_t + m_h(3 + v_t)$

Substituindo os valores, obtemos: $v_t = 3,5 \text{ m/s}$ e $d = 21 \text{ m}$

b) A solução acima considera que o homem já estava sobre o tronco antes de sua corrida. Entretanto o enunciado do problema não é explícito sobre este fato, permitindo a interpretação de que o homem pula sobre o tronco no momento de sua corrida. Com esta interpretação, a equação (1) fica:

$$400 \times 4 = 400v_t + 80(3 + v_t)$$

$$v_t = \frac{1360}{480} \text{ m/s} = \frac{17}{6} \text{ m/s}$$

Logo: $d = v_t \Delta t = 17 \text{ m}$

10. $Q_{cedido} + Q_{recebido} = 0$

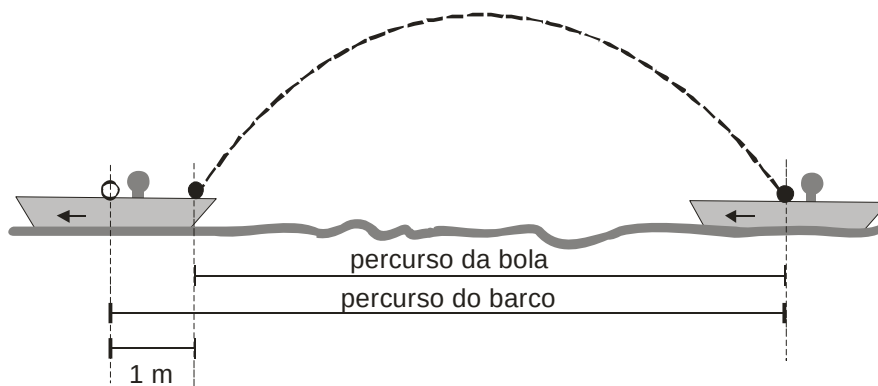
$$m_c c_c \Delta T + m_a c_a \Delta T = 0$$

Substituindo os valores:

$$50 \times 0,22 \times (20 - T) + 330 \times 1 \times (20 - 19) = 0$$

$$T = 50^\circ \text{C}$$

11.



De acordo com o desenho podemos observar que o barco, durante o tempo que a bola permanece no ar, percorre uma distância $D = \ell + x$, sendo x a distância horizontal percorrida pela bola e $\ell = 1 \text{ m}$.

Para o observador na terra, a bola percorre uma trajetória parabólica, sendo sua componente vertical descrita por:

$$y = v_{oy} t - \frac{g t^2}{2} \quad (1)$$

Ao atingir sua altura máxima $d = 5,0 \text{ m}$, a componente vertical da velocidade, v_y , se anula. Da equação $v_y = v_{oy} - g t$, obtemos:

$$v_{oy} = g t_s,$$

onde t_s é o instante em que a bola atinge sua altura máxima d .

Substituindo este valor em (1) obtemos: $d = \frac{g t_s^2}{2}$.

$$\text{Logo: } 5,0 = \frac{10 t_s^2}{2} \Rightarrow t_s = 1,0 \text{ s}$$

Como o tempo de subida é igual ao tempo de descida, concluímos que o tempo em que a bola permanece no ar é igual a :

$$t_{v\hat{o}o} = 2,0 \text{ s}$$

Neste tempo a bola vai percorrer uma distância $x = v t_{v\hat{o}o}$. Como no instante de lançamento a velocidade horizontal da bola é a mesma do barco, ou seja, 2 m/s , então:

$$x = 2,0 \times 2,0 = 4,0 \text{ m}$$

O barco vai percorrer uma distância $D = (1,0 + 4,0) \text{ m} = 5,0 \text{ m}$

Em relação ao barco temos: $D = v_o t + \frac{a t^2}{2}$

Substituindo os valores obtemos: $5,0 = 2,0 \times 2,0 + \frac{a \times 2,0^2}{2}$

Resolvendo encontramos para a aceleração o valor:

$$a = 0,5 \text{ m/s}^2$$

12. a) Da equação dos gases ideais, $PV = nRT$,

$$\text{obtemos: } \Delta T = \frac{P}{nR} \Delta V$$

Como esta expansão ocorre com velocidade constante, teremos:

$$\Delta V = A \Delta x = A v \Delta t$$

$$\text{Logo } \Delta T = \frac{P A v}{nR} \Delta t$$

Substituindo os valores: $\Delta T = \frac{10^5 \times 300 \times 10^{-4} \times 16,6 \times 10^{-3}}{3 \times 8,3} \times 50$

Obtemos: $\Delta T = 100 \text{ K}$

b) A quantidade de energia transferida ao gás será:

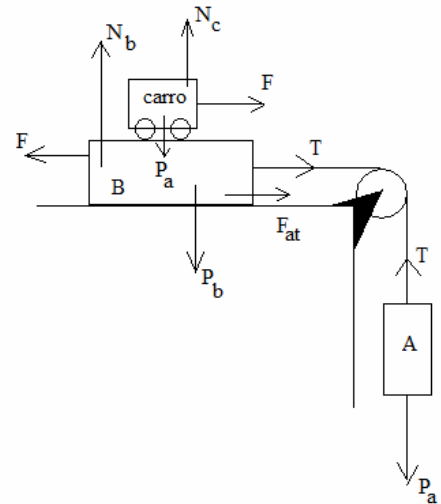
$$\Delta Q = n C_p \Delta T = \frac{C_p P A v}{R} \Delta t$$

Sabemos que para gases ideais temos $C_p = C_v + R$, de modo que $C_p = \frac{7}{2} R$

$$\text{Assim } \Delta Q = \frac{7 P A v}{2} \Delta t$$

$$\Delta Q = 8715 \text{ J}$$

13. a) Do diagrama abaixo, observa-se que para o bloco B se mover para a esquerda (pois A está subindo) é necessário que haja uma força F para a esquerda. Esta força é devida ao atrito das rodas do carro com a superfície de B. Usando a terceira lei de Newton, concluímos que o carro deve ser acelerado para a direita conforme o desenho fornecido.



b) De acordo com o diagrama de forças da figura, observamos que:

$$N_b = P_a + P_b = 2 m g \quad (1)$$

$$F = m a \quad (2)$$

$$F = F_{at} + T \quad (3)$$

$$T = P_a = m g \quad (4)$$

Substituindo os valores o valor de (4) em (3)

$$F = \mu N_b + m g$$

Substituindo a equação (2) na equação anterior:

$$m a = \mu 2 m g + m g$$

$$a = g (2\mu + 1)$$

14. Como não existe variação da quantidade de gás na bolha, podemos escrever:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\text{Ou seja: } V_2 = \frac{V_1 T_2}{P_2 T_1} P_1 \quad (1)$$

onde consideramos o fundo do lago o ponto 1 e a superfície o ponto 2. Se P_a é a pressão atmosférica, a pressão no fundo do lago será:

$$P_1 = P_a + \rho g h$$

$$P_1 = (10^5 + 10^3 \times 10 \times 40) = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (2)$$

Substituindo a equação (2) na equação (1) obtemos:

$$V_2 = \frac{14 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^2}{10^5 \times 280} \times 5 \times 10^5 = 7,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$V_2 = 75 \text{ cm}^3$$

15. a) Entre o primeiro e segundo semáforo, a aceleração é constante de modo que utilizando a equação: $v = v_o + at$, obtemos:

$$a = \frac{v_m}{t} = \frac{v_m}{10} \quad (1)$$

Onde fizemos $t = 10 \text{ s}$ já que o veículo chega ao segundo sinal no instante em que ele abre.

Seja $t = 0$ o instante em que ele cruza o *segundo* semáforo e restam ainda 9 pela sua frente. Os próximos semáforos irão abrir nos instantes $t = 10 \text{ s}, 20 \text{ s}, 30 \text{ s} \dots$ e fechar nos instantes $t' = 40 \text{ s}, 50 \text{ s}, 60 \text{ s} \dots$

O ultimo semáforo (isto é, o décimo primeiro) irá abrir em $t = 90 \text{ s}$ e fechar em $t' = 120 \text{ s}$. A distância a ser percorrida entre o segundo este ultimo semáforo é de $s = 1800 \text{ m}$.

Para se chegar neste semáforo no instante que ele está abrindo sua velocidade deverá ser:

$$v_{\max} = \frac{s}{t_{10}} = \frac{1800}{90} = 20 \text{ m/s}$$

Para se chegar nesse semáforo no instante que ele está fechando, sua velocidade será:

$$v_{\min} = \frac{s}{t'_{10}} = \frac{1800}{120} = 15 \text{ m/s}$$

$$\text{A velocidade média: } v_m = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}$$

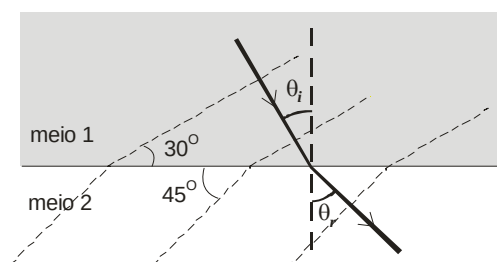
Resulta $v_m = 17,5 \text{ m/s}$. Substituindo este valor em (1) obtemos:

$$a = 1,75 \text{ m/s}^2$$

b) Como a aceleração é constante e o tempo de percurso do primeiro ao segundo semáforo é 10 s, então a distância percorrida será de:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \quad \Rightarrow \quad x = 87,5 \text{ m}$$

16.



Pela lei de Snell, temos:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2},$$

onde θ_i e θ_r são os ângulos de incidência e de refração. Estes ângulos são formados pela reta normal à superfície e a direção de propagação das ondas. Esta direção, por sua vez, é perpendicular às frentes de onda.

Temos então $\theta_i = 30^\circ$ e $\theta_r = 45^\circ$

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{200\sqrt{2}}{v_2},$$

resolvendo, encontramos o valor $v_2 = 400 \text{ m/s}$. A frequência da onda no segundo meio é a mesma do primeiro e seu comprimento de onda será dado por:

$$v = \lambda \cdot f$$

$$400 = \lambda \cdot 400$$

$$\lambda = 1 \text{ m}$$