

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA 2007



Gabarito Prova de 1º e 2º Anos - 3ª Fase

01. Quando o bloco atinge o *loop*, ele passa a descrever um movimento circular, de modo que no ponto A as forças que nele atuam são tais que:

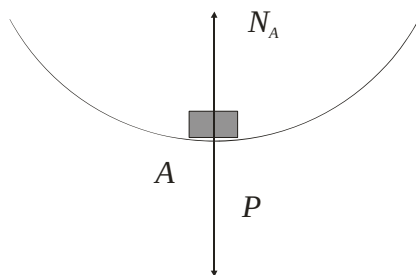


Fig.1

$$N_A - P = F_{cA} \quad \Rightarrow \quad N_A = mg + \frac{mv_A^2}{R} \quad (1)$$

onde N_A é a força normal, P é seu peso e F_{cA} é a força centrípeta resultante.

Considerando que o zero da energia potencial se encontra na base do loop, isto é, no ponto A, no topo da trajetória a energia do bloco é: $E_o = mgh = 2,5mgR$.

No ponto A sua energia cinética é: $E_A = \frac{1}{2}mv_A^2$

Assim, pela conservação de energia mecânica, devemos ter $E_o = E_A$, isto é:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = 2,5mgR \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{5gR}$$

Logo, usando (1) e $m = 0,1 \text{ kg}$ teremos:

$$N_A = mg + \frac{5mgR}{R} \quad \Rightarrow \quad N_A = 6mg \quad \Rightarrow \quad N_A = 6 \text{ N}$$

Para o cálculo da força exercida pela superfície sobre o bloco no ponto B, observa-se da figura 2 que:

$$N_B - P_y = F_{cB} \quad \Rightarrow \quad N_B = mg \cos \theta + \frac{mv_B^2}{R} \quad (2)$$

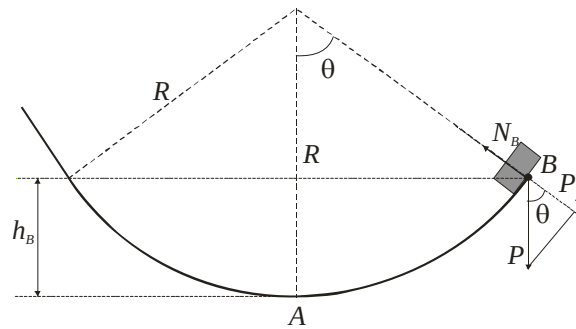


Fig. 2

No ponto B a energia do bloco é: $E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B$

Da figura 2 podemos ver que $h_B = R - R \cos \theta$. Como $\cos \theta = \cos 60^\circ = 0,5$, então, $h_B = 0,5 R$.

Pela conservação de energia mecânica $E_o = E_B$. Logo

$$2,5 m g R = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0,5 m g R \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 4 g R$$

$$\text{Logo, } v_B = 2\sqrt{g R}$$

$$\text{Usando este valor em (2)} \quad \Rightarrow \quad N_B = m g \cos 60^\circ + \frac{m v_B^2}{R} = 0,5 m g + \frac{4 m g R}{R}$$

$$\text{Resulta: } N_B = 4,5 m g \quad \Rightarrow \quad N_B = 4,5 N$$

b) Colocando a origem do sistema de coordenadas Oxy no ponto A, as equações que descrevem a trajetória do objeto logo após passar pelo ponto B serão:

$$x = x_o + v_{ox} t \quad (3)$$

$$y = y_o + v_{oy} t - \frac{g t^2}{2} \quad (4)$$

Onde:

$$x_o = R \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{\sqrt{3}}{5} m = 0,346 m \quad \text{e} \quad v_{ox} = v_B \cos \theta = \frac{v_B}{2} = \frac{2\sqrt{g R}}{2} = 2 m/s$$

$$y_o = h_B = R(1 - \cos \theta) = 0,5 R = 0,2 m \quad \text{e} \quad v_{oy} = v_B \sin \theta = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} m/s$$

Quando o objeto atinge o chão teremos $y = 0$ e a equação (4) torna-se:

$$5 t^2 - 2\sqrt{3} t - 0,2 = 0$$

Cuja solução, desprezando a raiz negativa, será

$$t = \frac{(\sqrt{3} + 2)}{5} \approx 0,746$$

Substituindo este valor em (3), obtemos

$$x = \frac{3\sqrt{3} + 4}{5} m = 1,84 m$$

02. As componentes da velocidade inicial nos eixos x e y são respectivamente:

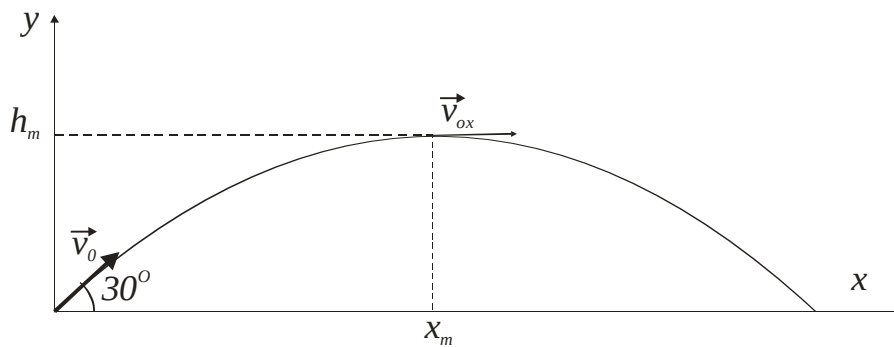


Fig. 3

$$v_{ox} = v_o \cos 30^0 = 500 \frac{\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$v_{oy} = v_o \sin 30^0 = 500 \frac{1}{2} = 250 \text{ m/s}$$

Para determinar a altura máxima, h_m , que o projétil alcança, usamos:

$$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g \Delta y \tag{1}$$

Quando $\Delta y = h_m$, $v_y = 0$, de modo que, usando (1), obtemos:

$$h_m = \frac{v_{oy}^2}{2g} = 3125 \text{ m}$$

Para determinarmos a posição x_m onde o projétil alcança sua altura máxima, determinamos inicialmente o instante t_m onde isto ocorre através de:

$$v_y = v_{oy} - g t .$$

$$\text{Logo } t_m = \frac{v_{oy}}{g} = 25 \text{ s}$$

$$\text{Desta forma, } x_m = v_{ox} t_m = 6250\sqrt{3} \text{ m} \tag{2}$$

a) Ao atingir o ponto mais alto o projétil se divide em dois fragmentos, A e B, iguais de mesma massa. Note que neste instante a componente vertical da velocidade, v_y , do projétil é nula de modo que o momento linear do projétil tem apenas componente horizontal, ou seja:

$$p_o = p_{ox} = m v_{ox} \quad (3)$$

Mas, de acordo com o enunciado, imediatamente após a explosão o fragmento B começa a cair em queda livre a partir do repouso. Isto implica que seu momento é nulo, de forma que aplicando a conservação de momento temos:

$$p_{ox} = p_{Ax} \quad (4)$$

ou seja, o momento linear adquirido pelo fragmento A é puramente horizontal e igual ao momento do projétil.

Assim, usando (3) e (4), obtemos:

$$m v_{ox} = m_A v_{Ax}.$$

Como $m_A = \frac{m}{2}$, obtemos:

$$v_{Ax} = 2 v_{ox} = 500\sqrt{3} \text{ m/s}$$

A distância percorrida pelo fragmento A, contada a partir da posição de lançamento do projétil, até atingir o solo é:

$$x_A = x_m + v_{Ax} t_A, \quad (5)$$

onde t_A é o tempo de queda deste fragmento até o solo. Podemos calcular este tempo, observando-se que seu movimento no eixo Oy é de queda livre, pois sua velocidade inicial tem apenas componente horizontal. Em outros termos devemos ter:

$$h_m = \frac{g}{2} t_A^2$$

Como $h_m = 3125 \text{ m}$, obtemos

$$t_A = 25 \text{ s}$$

Substituindo este valor em (5) e usando (2) obtemos:

$$x_A = 18750\sqrt{3} \text{ m}$$

b) A explosão do projétil é resultado de um processo interno que ao ser acionado libera energia a qual parcela dela é transferida aos fragmentos, enquanto outra parte é convertida em energia luminosa, sonora e térmica.

Seja E_o é a energia mecânica do projétil imediatamente antes da explosão e $E_{AB} = E_A + E_B$ é a energia mecânica total de ambos os fragmentos imediatamente após a explosão.

$$\text{Temos então } E_o = E_c + E_p = \frac{m v_{ox}^2}{2} + m g h_m$$

$$\text{Como } E_A = \frac{m_A v_{Ax}^2}{2} + m_A g h_m = \frac{m(2v_{ox})^2}{4} + \frac{m}{2} g h_m \quad \text{e} \quad E_B = \frac{m}{2} g h_m$$

$$\text{Logo } E_{AB} = m v_{ox}^2 + m g h_m$$

A variação de energia mecânica será, portanto: $\Delta E = E_{AB} - E_o$.

$$\Delta E = \frac{m v_{ox}^2}{2}$$

Como $v_{ox} = 250\sqrt{3} \text{ m/s}$ e $m = 0,1 \text{ kg}$, obtemos:

$$\Delta E = 9375 \text{ J}$$

03. A equação de movimento do projétil (no eixo Oy, orientado verticalmente para cima) é:

$$y = y_o + v_{oy} t - \frac{g t^2}{2},$$

onde $y_o = 0$ e $v_{oy} = v_o \sin \theta$.

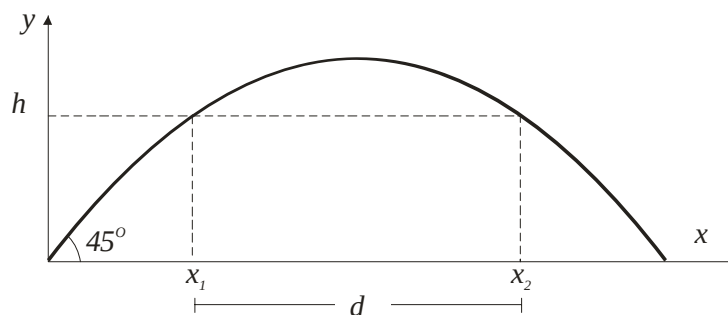


Fig. 4

Se a arma é ajustada para o alcance máximo, o ângulo de disparo será $\theta = 45^\circ$. Assim, se o projétil passa por $y = h$, a equação de movimento torna-se:

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o t - \frac{g}{2} t^2, \text{ ou}$$

$$g t^2 - \sqrt{2} v_o t + 2h = 0, \text{ cujas soluções são:}$$

$$t = \frac{\sqrt{2} v_o \pm \sqrt{2 v_o^2 - 8gh}}{2g} = t_m \pm t'$$

$$\text{onde: } t_m = \frac{\sqrt{2} v_o}{2g} \quad \text{e} \quad t' = \frac{\sqrt{2 v_o^2 - 8gh}}{2g} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{v_o^2 - 4gh}}{g}$$

A solução $t_1 = t_m - t'$ é o instante onde a partícula atinge o primeiro ponto (veja figura). Isto ocorre em

$$x_1 = v_{ox} t_1 = v_o \cos \theta t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o t_1$$

Analogamente, a solução $t_2 = t_m + t'$ corresponde ao instante em que a partícula atinge o segundo ponto.

$$\text{Assim: } x_2 = v_{ox} t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o t_2$$

A distância d entre estes pontos é dada por:

$$d = x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o (t_2 - t_1)$$

$$\text{Observe que } t_2 - t_1 = 2t' = \frac{\sqrt{2} \sqrt{v_o^2 - 4gh}}{g}$$

Obtemos então:

$$d = \frac{v_o}{g} \sqrt{v_o^2 - 4gh}$$

Observação: Podemos também resolver este problema da seguinte forma:

Considere as equações de movimento:

$$x = v_o \cos \theta t \quad \text{e} \quad y = v_o \sin \theta t - \frac{g}{2} t^2$$

Da primeira equação, obtemos $t = \frac{x}{v_o \cos \theta}$. Substituindo este valor na segunda equação teremos:

$$y = \tan \theta x - \frac{g}{2 v_o^2 \cos^2 \theta} x^2$$

Usando o fato de que $\theta = 45^\circ$, esta equação se reduz a:

$$y = x - \frac{g}{v_o^2} x^2$$

Para $y = h$ a equação acima pode ser escrita como:

$$g x^2 - v_o^2 x + v_o^2 h = 0$$

Cujas soluções serão:

$$x = \frac{v_o^2}{2g} \pm \frac{\sqrt{v_o^4 - 4g v_o^2 h}}{2g} = x_m \pm x'$$

As soluções serão

$$x_1 = x_m + x' \quad \text{e} \quad x_2 = x_m - x'$$

Note que $d = x_2 - x_1 = 2x'$

$$\text{Assim, } d = \frac{v_o}{g} \sqrt{v_o^2 - 4gh}$$

04. Aplicando a conservação de energia para a esfera de massa m_1 e considerando nula a energia potencial no ponto mais baixo de sua trajetória, teremos:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g \ell \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g\ell} = \sqrt{2 \times 10 \times 0,45} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 3 \text{ m/s}$$

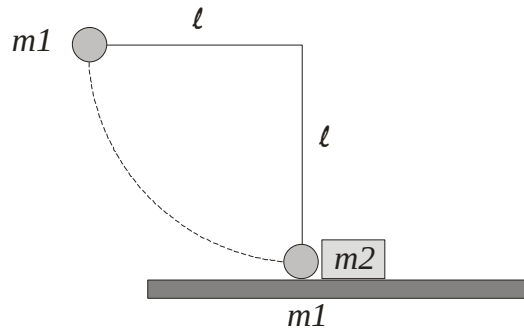


Fig. 5

Sabendo-se que o bloco de massa m_2 estava em repouso antes de ser atingido pela esfera e que o choque é elástico, a conservação da quantidade de movimento nos leva a:

$$m_1 v_1 = m_2 v'_2 - m_1 v'_1 \quad (1)$$

onde v'_1 e v'_2 são as velocidades da esfera e do bloco imediatamente após o choque.

O coeficiente de restituição é dado por $\varepsilon = \frac{|\text{velocidade relativa de afastamento}|}{|\text{velocidade relativa de aproximação}|} = \frac{v'_2 + v'_1}{v_1}$

Como o choque é perfeitamente elástico, $\varepsilon = 1$. Assim

$$v'_2 + v'_1 = v_1 \quad \Rightarrow \quad v'_1 = v_1 - v'_2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) teremos:

$$m_1 v_1 = m_2 v'_2 - m_1 (v_1 - v'_2)$$

o que nos leva a:

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

Usando os valores fornecidos:

$$v'_2 = \frac{2 \times 0,2 \times 3}{0,2 + 1,8} \quad \Rightarrow \quad v'_2 = 0,6 \text{ m/s}$$

Utilizando este valor em (2), obtemos:

$$v'_1 = 2,4 \text{ m/s}$$

b) O bloco de aço imediatamente após o choque tem energia cinética:

$$E_c = \frac{m_2 v'^2_2}{2} = 0,324 \text{ J}$$

O trabalho realizado pela força de atrito em uma distância d é:

$$\tau = f_{at} d = \mu N d = \mu m_2 g d \quad \Rightarrow \quad \tau = 3,6 d$$

Este trabalho é igual à variação de energia cinética do bloco. Logo, a distância percorrida pelo bloco até ele parar será:

$$3,6 d = 0,324 \quad \Rightarrow \quad d = 9 \text{ cm}$$

05. Para que o corpo permaneça sempre em contato com a curva, sua velocidade no ponto C deve ser maior ou igual a $\sqrt{r g}$, pois:

No trecho BCD a trajetória é circular, de modo que no ponto C a 2ª lei de Newton nos leva a:

$$N_C + P = F_c$$

No limite onde o corpo perde contato com a superfície devemos ter:

$$N_C = 0 \quad \Rightarrow \quad P = F_c,$$

ou seja

$$mg = m \frac{v_C^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{r g}$$

Assim, como a energia em A é $E_A = \frac{1}{2} m v_o^2$ e em C é

$$E_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h_C$$

pela conservação de energia devemos ter:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h_C \quad \Rightarrow \quad v_o = \sqrt{v_C^2 + 2 g h_C}$$

Usando os valores $r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ e $h_C = \overline{AB} + r = 0,4 \text{ m}$, obtemos

$$v_o = 3 \text{ m/s}$$

Este é o valor limite (mínimo) para que a partícula não perca contato com a superfície.

06.

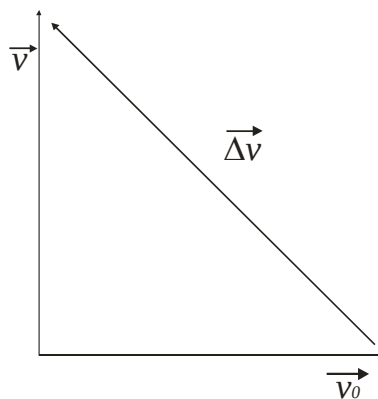


Fig. 6

Se $\vec{v}_0$ é a velocidade inicial e $\vec{v}$ é a velocidade final, a variação de velocidade $\Delta\vec{v}$ é:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v} = \Delta\vec{v} + \vec{v}_0$$

Desta forma, de acordo com a figura 6 teremos:

$$\Delta v^2 = v_0^2 + v^2 = 6^2 + 8^2$$

$$\Delta v = 10 \text{ m/s}$$

$$I = \Delta p = m \Delta v = 0,5 \times 10$$

$$I = 5 \text{ N.s}$$

$$\text{b) } I = F \Delta t \Rightarrow 5 = F \times 0,1$$

$$F = 50 \text{ N}$$

07. A energia mecânica total do anel é a soma das energias cinética (E_c), potencial (E_p) e elástica

($E_{el} = \frac{kx^2}{2}$, onde x é a deformação da mola). Consideramos nula a energia potencial no ponto mais baixo

da trajetória, isto é, no ponto D.

No ponto B, a mola não está deformada, de modo que E_{el} é nula. A energia total neste ponto será:

$$E_B = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR$$

O comprimento da mola não deformada é $L_0 = R - d$, onde $d = 2 \text{ cm}$ (ver figura). Assim, no ponto D, a mola está deformada de $x = 2d$. A energia total em D será, portanto:

$$E_D = \frac{mv_D^2}{2} + \frac{k(2d)^2}{2}$$

Como a energia se conserva e considerando que as velocidades do anel em B e em D são iguais, isto é, $v_B = v_D$, teremos:

$$\frac{mv_B^2}{2} + 2mgR = \frac{mv_B^2}{2} + 2kd^2$$

$$\text{Logo, } k = \frac{mgR}{d^2} \Rightarrow k = \frac{40 \times 10^{-3} \times 10 \times 0,1}{(2 \times 10^{-2})^2}$$

$$k = 100 \text{ N/m}$$

08. a) Pela lei de Pascal a pressão aplicada em um fluido é transmitida integralmente a todos os pontos do fluido. Isto implica que

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \Rightarrow F_2 = 240 \text{ N}$$

b) O volume de fluido deslocado no êmbolo maior deve ser o mesmo que no êmbolo menor, isto é:

$$V_2 = V_1 \Rightarrow A_2 d_2 = A_1 d_1 \Rightarrow d_2 = \frac{A_1}{A_2} d_1 \Rightarrow d_2 = 5 \text{ cm}$$

c) O trabalho realizado pela força no êmbolo maior é:

$$\tau_2 = F_2 d_2 = 240 \times 0,05 \Rightarrow \tau_2 = 12 \text{ J}$$

A potência será, portanto:

$$P_2 = \frac{\tau_2}{t} \Rightarrow P_2 = 1,2 \text{ W}$$

09. Sobre a esfera atuam as forças peso $\vec{P}$, a força normal $\vec{N}_1$ devido a parede vertical e $\vec{N}_2$ devido a parede inclinada. Como o corpo está em equilíbrio, devemos ter

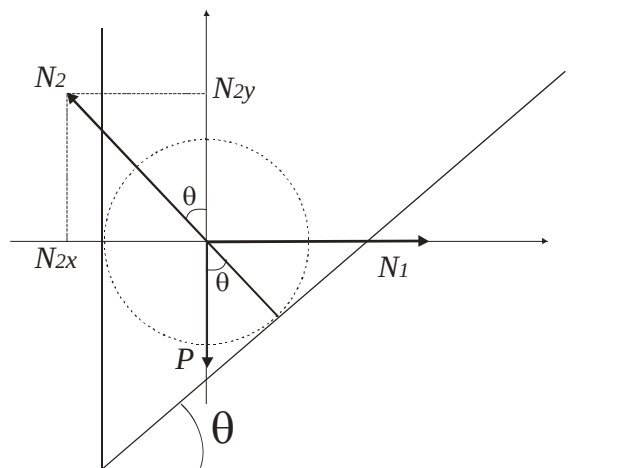


Fig. 7

$$\vec{F}_T = \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$$

Decompondo esta equação no sistema de coordenadas da figura, obtemos:

$$P = N_{2y} = N_2 \cos \theta \tag{1}$$

$$N_1 = N_{2x} = N_2 \sin \theta \tag{2}$$

Dividindo membro a membro (2) por (1) teremos:

$$\frac{N_1}{P} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow N_1 = P \operatorname{tg} \theta$$

Substituindo este valor em (2) teremos:

$$N_2 = \frac{P \operatorname{tg} \theta}{\sin \theta} = \frac{P}{\cos \theta}$$

10. Para que o sistema esteja em equilíbrio, a força total que atua sobre o bloco 1 deve ser nula. Assim, decompondo as forças nos eixos Ox e Oy obtemos:

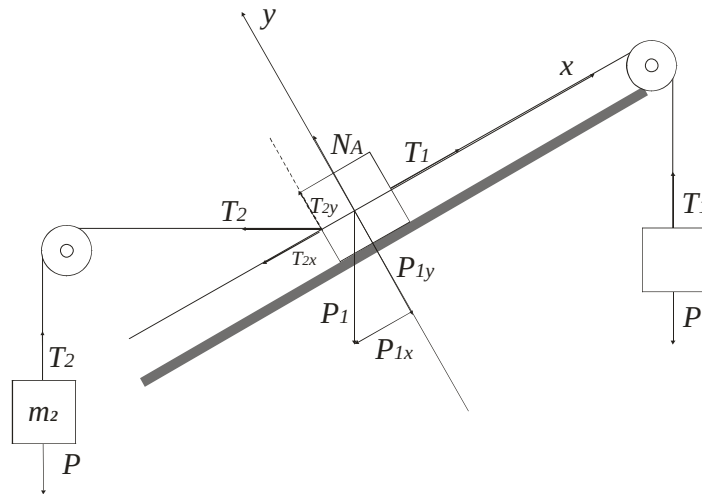


Fig. 9

Como o sistema está em equilíbrio, a 2ª lei de Newton aplicada em cada corpo nos leva a: $\sum \vec{F} = 0$.

Desta forma, aplicando esta lei no corpo cujo peso é P , teremos:

$$T_1 - P = 0 \Rightarrow T_1 = P$$

Analogamente, para o corpo de massa m_2 , teremos $T_2 = P_2$.

Para o corpo de massa m_1 , teremos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 = P_{1x} + T_{2x} \Rightarrow P = P_{1x} + P_{2x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + T_{2y} = P_{1y} \Rightarrow N_1 + P_{2y} = P_{1y}$$

$$P_{2x} = P_2 \cos 30^\circ = 50\sqrt{3} \text{ N}$$

$$P_{2y} = P_2 \sin 30^\circ = 50 \text{ N}$$

$$\begin{cases} P_{1x} = P_1 \sin 30^\circ = 500 \text{ N} \\ P_{1y} = P_1 \cos 30^\circ = 500\sqrt{3} \text{ N} \end{cases}$$

Assim,

$$P = 500 + 50\sqrt{3} \Rightarrow P \approx 586,6 \text{ N}$$

$$N_A = 500\sqrt{3} - 50 \Rightarrow N_A \approx 816 \text{ N}$$

11. No trecho acelerado o carro percorre uma distância de:

$$x_{ac} = \frac{a t_o^2}{2} = 36 \text{ m},$$

onde usamos $a = 2 \text{ m/s}^2$ e $t_o = 6 \text{ s}$.

A velocidade do carro nesse instante será:

$$v = v_o + a t_o$$

Como $v_o = 0$, logo $v = 12 \text{ m/s}$

Se iniciarmos a contagem do tempo no instante em que o motorista deixa de acelerar, mas contando a distância a partir do sinal de trânsito, a equação horária do carro será:

$$x_c = 36 + 12t$$

Por outro lado, o caminhão durante o tempo $t_o = 6 \text{ s}$ percorre a distância de

$$x_{oCm} = v_{Cm} t_o = 60 \text{ m}$$

Assim, a equação horária do caminhão será:

$$x_{Cm} = 60 + 10t$$

O carro irá alcançar o caminhão quando

$$x_c = x_{Cm}$$

Ou seja,

$$36 + 12t = 60 + 10t \quad \Rightarrow \quad t = 12 \text{ s}$$

Logo, os veículos se encontrarão no instante $t = 12 \text{ s}$, contado a partir do instante em que o carro se movimenta com velocidade constante, ou 18 s após se cruzarem no sinal.

Substituindo o valor $t = 12 \text{ s}$ em qualquer das equações de movimento acima, encontramos

$$x = 180 \text{ m}$$

ou seja, os veículos se encontram a 180 m do sinal de trânsito.

Observação: uma outra maneira de se resolver a questão é observar que o movimento do carro é uma composição de um movimento acelerado (MRUV) com MRU, ou seja:

$$x_c = x_{MRUV} + x_{MRU} \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{at_o^2}{2} + at_o(t - t_o),$$

onde $t \geq t_o$, t e x_c são contados a partir do sinal de trânsito.

Assim $x_c = 36 + 12(t - 6)$

O movimento do caminhão será dado por:

$$x_{Cm} = 10t$$

Quando $x_c = x_{Cm}$, teremos:

$$36 + 12(t - 6) = 10t$$

Cuja solução será $t = 18 \text{ s}$ e $x = 180 \text{ m}$

12. a) $v_x = v_{ox} + at = 2 \times 4 = 8 \text{ m/s}$ e $v_y = v_{oy} = 6 \text{ m/s}$

Depois de 4 s o módulo da velocidade da bola será:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 8^2 + 6^2 \quad \Rightarrow \quad v = 10 \text{ m/s}$$

A direção da velocidade, em relação ao eixo x é dada por:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) = 37^\circ$$

$$\text{b) } x = v_{ox} t + \frac{a t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = t^2 \quad (1)$$

$$y = v_y t \quad \Rightarrow \quad y = 6t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{y}{6}$$

Substituindo em (1)

$$x = \left(\frac{y}{6}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 36x \quad \Rightarrow \quad y = 6\sqrt{x}$$

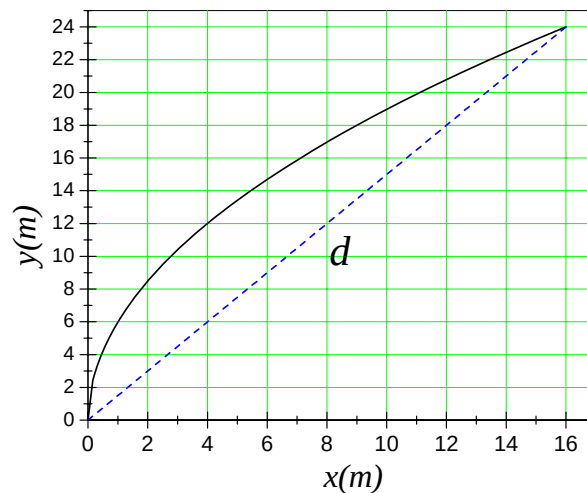


Fig. 10

c) Para $t = 4 \text{ s}$ temos:

$$x = t^2 = 16 \text{ m e } y = 6t = 24 \text{ m}$$

$$\text{Logo, } d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{832} \quad \Rightarrow \quad d = 8\sqrt{13} \text{ m} \approx 28,8 \text{ m}$$

13. Como se trata de gás ideal e a temperatura se mantém constante podemos dizer que

$$P_o V_o = P_s V_s \quad (1)$$

onde P_o e V_o indicam a pressão e volume no fundo do lago e P_s e V_s são a pressão e volume na superfície.

Se P_{atm} é a pressão atmosférica, então a pressão a uma profundidade y é dada por $P(y) = P_{atm} + \rho g y$, onde ρ é a densidade da água.

O volume do balão na superfície será $V_s = \frac{P_o}{P_s} V_o = \frac{P_{atm} + \rho g h}{P_{atm}} V_o$.

$$V_s = \frac{10^5 + 10^3 \times 10 \times 90}{10^5} V_o, \text{ resultando,}$$

$$V_s = 10 V_o$$

Aplicando o princípio de Arquimedes para o balão no ar, e orientando o eixo de coordenadas para cima, obtemos: $ma = E_{ar} - mg$.

Para que o balão flutue no ar será necessário que $a \geq 0$, ou seja

$$\frac{\rho_{ar} V_s g}{m} - g \geq 0 \quad \Rightarrow \quad V_s \geq \frac{m}{\rho_{ar}} \quad \Rightarrow \quad V_o \geq \frac{m}{10 \rho_{ar}}$$

Logo, $V_o \geq 1 m^3$.

14. a) O comprimento da barra à temperatura T_i é:

$$L_i = L_{i-1} [1 + \alpha_i (T_i - T_{i-1})]$$

$$\text{Assim, } L_4 = L_3 [1 + \alpha_4 (T_4 - T_3)]$$

$$\text{Mas } L_3 = L_2 [1 + \alpha_3 (T_3 - T_2)], \text{ etc.}$$

Desta forma, teremos:

$$L_4 = L_o [1 + \alpha_1 (T_1 - T_o)] [1 + \alpha_2 (T_2 - T_1)] [1 + \alpha_3 (T_3 - T_2)] [1 + \alpha_4 (T_4 - T_3)]$$

b) Se $\alpha = \bar{\alpha}$ é o valor médio dos coeficientes, onde $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4}$, então

$$L_4 = L_o [1 + \bar{\alpha} (T_4 - T_o)], \text{ ou}$$

$$L_4 = L_o \left[1 + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4} \right) (T_4 - T_o) \right]$$

15. O rendimento de uma máquina de Carnot é obtido por $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_q} = 1 - \frac{300}{600}$, ou seja $\eta_c = 0,5$.

Como a máquina do problema tem rendimento 20% menor, logo $\eta = 0,4$

- a) De acordo com o enunciado, o fluxo de calor proveniente da fonte quente, que penetra na máquina é numericamente igual ao de uma barra submetida a uma diferença de temperatura de 500 K, ou seja:

$$\frac{\Delta Q_q}{\Delta t} = k A \frac{\Delta T}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta Q_q}{\Delta t} = 50 \times 2 \times \frac{500}{0,1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta Q_q}{\Delta t} = 500 \text{ kW}$$

O rendimento de uma máquina é definido como $\eta = \frac{\Delta \tau}{\Delta Q_q}$, onde $\Delta \tau$ é o trabalho realizado.

Assim, $\frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \eta \frac{\Delta Q_q}{\Delta t}$, ou seja, a potência da máquina é:

$$P = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = 200 \text{ kW}$$

b) Em uma máquina térmica, o calor rejeitado para a fonte fria é:

$$\Delta Q_f = \Delta Q_q - \Delta \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta Q_f}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_q}{\Delta t} - \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = (1 - \eta) \frac{\Delta Q_q}{\Delta t}$$

$$\text{Logo, } \frac{\Delta Q_f}{\Delta t} = 300 \text{ kJ/s}$$

A quantidade de calor rejeitada em 10 minutos (= 600 s) será:

$$\Delta Q_f = 300 \times 10^3 \times 600 \quad \Rightarrow \quad \Delta Q_f = 1,8 \times 10^8 \text{ J}$$

A quantidade de calor necessária para elevar uma massa m de gelo de $T_0 = -20^\circ\text{C}$ até 0°C e em seguida derrete-la, é:

$$\Delta Q_f = m c_g (T - T_0) + m L,$$

onde $c_g = 2100 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$ é o calor específico do gelo e $L = 330 \text{ kJ/kg}$ é o calor de fusão do gelo.

Assim,

$$1,8 \times 10^8 = m(2100 \times 20 + 330 \times 10^3)$$

Resulta $m = 483,9 \text{ kg}$

16. a) Se o processo $A \rightarrow B$ é isobárico, a pressão no estado B é igual ao do estado A, isto é $P_B = P_A = 32 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. O volume do gás em B, de acordo com o enunciado é $V_B = 2 \text{ m}^3$.

Como o processo $B \rightarrow C$ é adiabático, então $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma \Rightarrow V_C = \left(\frac{P_B}{P_C} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_B$.

$$\text{Como } \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \text{ então } \gamma = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad V_C = (32)^{3/5} V_B \Rightarrow V_C = 16 \text{ m}^3$$

O diagrama PV será então:

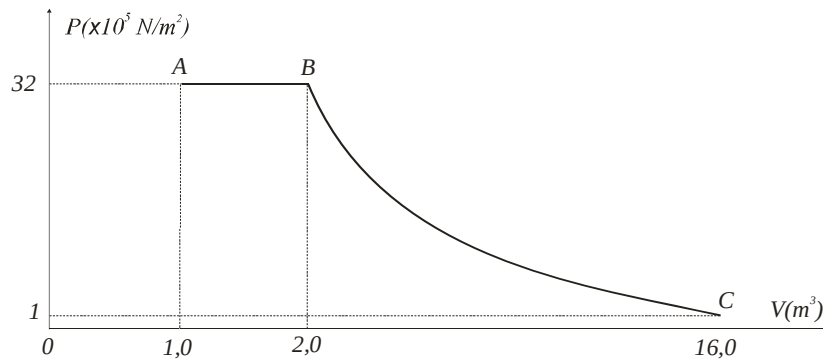


Fig. 11

b) o trabalho na expansão $A \rightarrow C$ será:

$$\Delta \tau = \Delta \tau_{AB} + \Delta \tau_{BC}$$

- O trabalho no processo isobárico $A \rightarrow B$ é

$$\Delta \tau_{AB} = P_A (V_B - V_A) \quad \Delta \tau_{AB} = 32 \times 10^5 \text{ J}$$

- No processo adiabático $B \rightarrow C$ o trabalho é:

$$\Delta \tau_{BC} = \frac{1}{1-\gamma} (P_C V_C - P_B V_B)$$

$$\Delta \tau_{BC} = \frac{1}{1-5/3} (1 \times 16 - 32 \times 2) \times 10^5 = 72 \times 10^5 \text{ J}$$

- O trabalho total será, portanto:

$$\Delta \tau = 104 \times 10^5 \text{ J}$$

c) A variação da energia interna total será $\Delta U_{AC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC}$

Da primeira lei da termodinâmica, teremos:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta \tau \quad (1)$$

- Como o processo $A \rightarrow B$ é isobárico, então:

$$\Delta U_{AB} = n C_p \Delta T - P \Delta V$$

Usando a equação dos gases ideais, $PV = nRT$ e usando o fato de que a pressão se mantém constante,

teremos: $\Delta T = \frac{P \Delta V}{nR}$, de forma que:

$$\Delta U_{AB} = \left(\frac{C_p}{R} - 1 \right) P \Delta V = \frac{C_v}{R} P \Delta V, \text{ pois } C_p = C_v + R$$

$$\text{Mas } P \Delta V = P_A (V_B - V_A) = \tau_{AB}$$

Como $C_v = \frac{3}{2} R$, então

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} \tau_{AB} = 48 \times 10^5 \text{ J}$$

- O processo $B \rightarrow C$ é adiabático, de forma que $\Delta Q = 0$. Assim, de (1) deve-se ter:

$$\Delta U_{BC} = -\Delta \tau_{BC} = -72 \times 10^5 \text{ J}$$

- A variação da energia interna em todo processo será:

$$\Delta U_{AC} = -24 \times 10^5 \text{ J}$$

17.

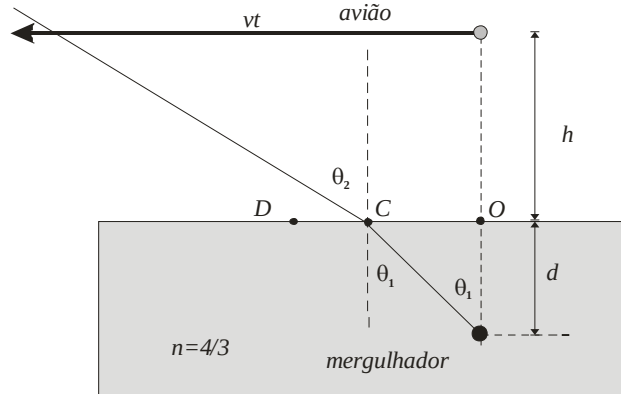


Fig. 12

a) Se o tempo de ida e volta do feixe foi de $8 \mu\text{s}$, logo o tempo de ida será de $4 \mu\text{s}$

$$\text{Assim } \Delta t_{\text{agua}} + \Delta t_{\text{ar}} = 4 \mu\text{s}, \quad \frac{d}{v_{\text{agua}}} + \frac{h}{c} = 4 \mu\text{s}, \quad v_{\text{agua}} = \frac{c}{n} = \frac{3c}{4}$$

Como $d = 60 \text{ m}$, logo $h = 1120 \text{ m}$

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{OC}{d} = 1 \Rightarrow \theta_1 = 45^\circ$$

$$\text{Usando a lei da refração no ponto C: } n_{\text{agua}} \sin \theta_1 = n_{\text{ar}} \sin \theta_2 \quad \sin \theta_2 = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Mas } \sin \theta_2 = \frac{(vt - OC)}{\sqrt{(vt - OC)^2 + h^2}}$$

Fazendo $x = (vt - OC)$, então:

$$\sin \theta_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Elevando ao quadrado, teremos:

$$\frac{8}{9} (x^2 + h^2) = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2} h$$

Como $x = vt - OC$, onde $OC = 60 \text{ m}$ e $t = 10 \text{ s}$, então:

$$v = \frac{2\sqrt{2}h + 60}{10} \approx 322,8 \text{ m/s} = 1162 \text{ km/h}.$$

b) Aplicando a lei de refração no ponto D, obtemos:

$$\text{sen} \theta_2 = \frac{4}{3} \text{sen} \theta_1 \quad (1)$$

$$\text{onde } \text{sen} \theta_1 = \frac{OD}{\sqrt{OD^2 + d^2}}$$

Como $OD = 80 \text{ m}$ e $d = 60 \text{ m}$, então $\text{sen} \theta_1 = 0,8$

Substituindo em (1) teremos

$$\text{sen} \theta_2 = 1,0667 > 1,$$

o que é um absurdo. Observe que chegamos a esse resultado quando admitimos que há refração no ponto D. Concluimos então que o feixe do laser é totalmente refletido nesse ponto e não pode atingir o avião.

18. a) Usando a equação dos fabricantes de lentes

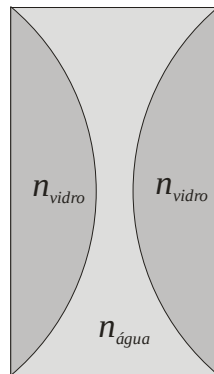


Fig. 13

$$\frac{1}{f} = \frac{n - n_o}{n_o} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

onde n e n_o são respectivamente os índices de refração da lente e do meio no qual ela está inserida e o raio de curvatura é positivo se a superfície da lente, vista pelo feixe de luz incidente, é convexa e negativo se côncava.

Assim, para as lentes plano-convexas obtemos $f_1 = f_2 = 100 \text{ cm}$. Para este cálculo usamos $R_1 = 50 \text{ cm}$, $R_2 \rightarrow \infty$, $n = 1,5$ e $n_o = 1$.

Ao preencher o espaço entre elas com água, haverá uma formação de uma lente bicôncava de índice de refração $n = 4/3$.

Fazendo $R_1 = -50 \text{ cm}$ e $R_2 = +50 \text{ cm}$ obtemos $f_3 = -75 \text{ cm}$. Temos então três lentes em contato, de modo que, fazendo a aproximação de lentes delgadas*, o conjunto forma uma única lente de distância focal f dada por:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}$$

Obtemos $f = 150 \text{ cm}$.

Como o objeto foi colocado a uma distância $p = 100 \text{ cm}$ da primeira lente, usando a equação das lentes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (2)$$

obtemos $q = -300 \text{ cm}$. A imagem é virtual.

Usando a fórmula do aumento $M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$ e sabendo-s que $h = 10 \text{ cm}$, obtemos:

$$h' = 30 \text{ cm}$$

A imagem será virtual e direita.

b) Como o conjunto todo está imerso na água, a distância focal das lentes irá ser alterada, pois $n_o = \frac{4}{3}$.

Usando a equação (1) vamos obter $f_1 = f_2 = 400 \text{ cm}$

O objeto está a uma distância $p_1 = 80 \text{ cm}$ da primeira lente, de modo que usando a equação (2) obtemos a distância da imagem formada por esta lente a uma distância $q_1 = -100 \text{ cm}$. Note que esta imagem é virtual e se forma à esquerda da primeira lente. Esta imagem é o objeto da segunda lente e se situa a uma distância $p_2 = |p_1| + d = 115 \text{ cm}$

Usando (2) obtemos

$$q_2 = -\frac{46000}{285} \approx -161,4 \text{ cm}$$

O aumento provocado por duas lentes é:

$$M = M_1 M_2 = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} \quad M = \frac{100 \times 46000}{80 \times 115 \times 285} = 1,75$$

A imagem final terá altura $h' = 17,5 \text{ cm}$ e será virtual e direita.

* *Observação:* A expressão usada no item a para o cálculo da distância focal do conjunto de lentes, só é válida para lentes delgadas. Se não considerarmos a "lente de água" como fina, a solução do problema será:

Seja n_i o índice de refração do meio onde o feixe de luz incide sobre lente (de índice de refração $n = 1,5$) e n_e o índice do meio onde a luz emerge da lente. A equação dos pontos conjugados neste caso é dada por:

$$\frac{n_i}{p} + \frac{n_e}{q} = \frac{(n - n_i)}{R_1} - \frac{(n - n_e)}{R_2}$$

Como a primeira lente tem sua face plana voltada para o feixe de luz, teremos $R_1 = \infty$ e $R_2 = -50 \text{ cm}$.

Teremos também $n_i = 1$ e $n_e = \frac{4}{3}$. Fazendo $p = 100 \text{ cm}$, obtemos $q = -200 \text{ cm}$

Esta imagem estará a uma distância $p_2 = d - q = 215 \text{ cm}$ da segunda lente. Para aplicar a equação dos pontos conjugados acima, devemos levar em conta agora que a face convexa é quem recebe o feixe

incidente, de modo que devemos ter $R_1 = +50 \text{ cm}$ e $R_2 = \infty$. Teremos também $n_i = \frac{4}{3}$ e $n_e = 1$. Com

estes dados obtemos $q_2 = -348 \text{ cm}$. O aumento provocado por duas lentes é:

$$M = M_1 M_2 = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} = 3,24 \text{ A imagem final terá altura } h' = 32,4 \text{ cm} \text{ e será virtual e direita.}$$

Como observação final, notamos que se fizermos $d \rightarrow 0$, o resultado irá coincidir com o apresentado no item a.

19.

- Sistema 1: duas lentes convergentes

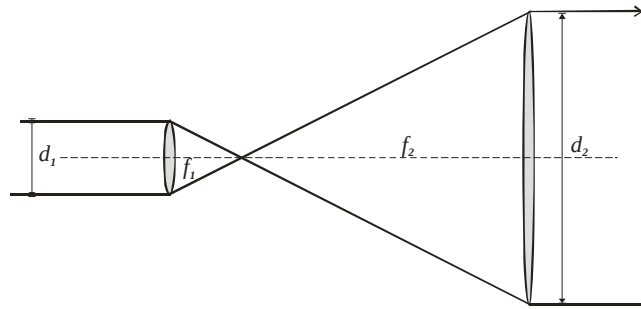


Fig. 14

Sejam duas lentes convergentes de diâmetros d_1 e d_2 e distâncias focais f_1 e f_2 respectivamente. O feixe de luz paralelo que incide sobre a lente 1 converge para o ponto focal desta lente. Se este ponto coincidir com o ponto focal da lente 2 o feixe emerge paralelamente ao eixo.

$$\text{Assim, devemos ter } f_1 + f_2 = 5 \text{ cm} \tag{1}$$

Por outro lado, da figura podemos deduzir que:

$$\frac{d_1}{2f_1} = \frac{d_2}{2f_2} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1} = 5 \Rightarrow f_2 = 5f_1$$

Substituindo em (1) obtemos $f_1 = \frac{5}{6} \text{ cm} \approx 0,83 \text{ cm}$ e $f_2 = \frac{25}{6} \text{ cm} \approx 4,17 \text{ cm}$

Devemos ter também que $d_2 = 5d_1$, ou seja, a lente 2 deve ter, no mínimo, um diâmetro 5 vezes maior que o do feixe incidente.

- Sistema 2: uma lente divergente e outra convergente

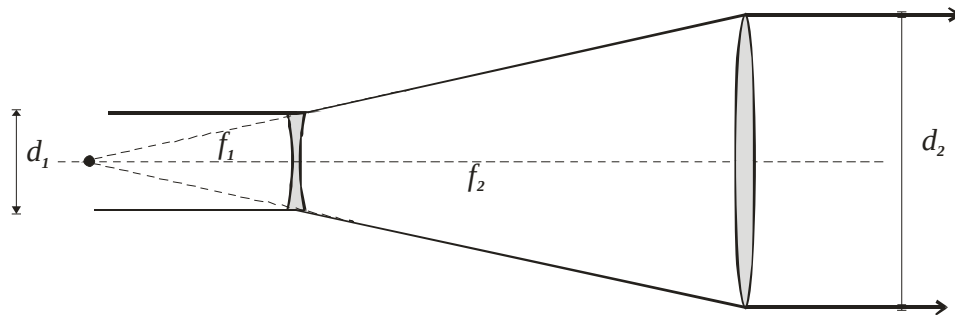


Fig. 15

O feixe de luz paralelo incide sobre a lente divergente e o feixe refratado diverge como se partisse do ponto focal imagem desta lente. Esta imagem é virtual, de modo que se encontra à esquerda da lente e a distância focal é negativa.

Colocando o ponto focal da lente 2 sobre este ponto, o feixe emergente sai paralelamente. Da figura se obtém:

$$\frac{d_1}{2|f_1|} = \frac{d_2}{2f_2} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{|f_1|} = 5 \Rightarrow f_2 = 5|f_1| \quad (2)$$

Devemos ter também: $f_2 - |f_1| = 5 \text{ cm}$

Substituindo em (2) obtemos: $|f_1| = 1,25 \text{ cm}$ e $f_2 = 6,25 \text{ cm}$. Como a lente 1 é divergente, então $f_1 = -1,25 \text{ cm}$. A lente 2 deve ter, no mínimo, um diâmetro 5 vezes maior que o do feixe incidente.

20.

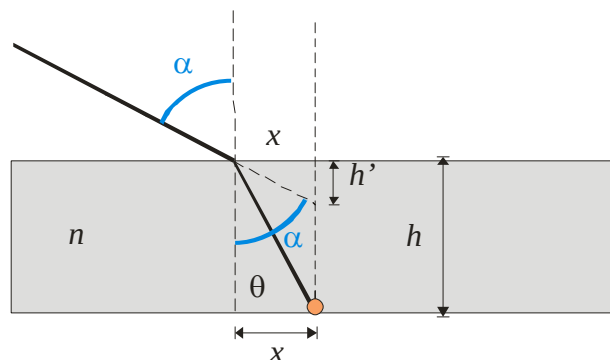


Fig. 16

Da figura observa-se que $\text{tg} \alpha = \frac{x}{h'} \Rightarrow x = h' \text{tg} \alpha$

Temos também que $\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h \operatorname{tg} \theta$

onde h e h' são respectivamente a profundidade e a profundidade aparente da moeda. Assim

$$h \operatorname{tg} \theta = h' \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow h = h' \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \theta} = h' \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

Usando a lei da refração $n \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \alpha$, teremos:

$$h = h' n \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} = h' n \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}}{\cos \alpha} \Rightarrow h = h' \frac{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\cos \alpha} \quad (1)$$

Quando o carro acelera, a superfície da água inclina de um ângulo ϕ em relação ao nível horizontal.

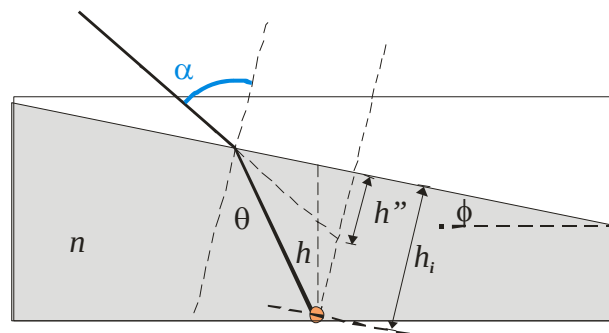


Fig. 17

A moeda estará agora a uma profundidade $h_i = h \cos \phi$ e a profundidade aparente será h'' . Como o ângulo de observação é o mesmo (α), então:

$$h_i = h'' \frac{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\cos \alpha} \quad (2)$$

Dividindo a equação (2) por (1), obtemos:

$$\frac{h_i}{h} = \frac{h''}{h'} \Rightarrow \frac{h \cos \phi}{h} = \frac{h''}{h'}$$

Como $h'' = 25\sqrt{3} \text{ cm}$ e $h' = 50 \text{ cm}$

$$\text{obtemos } \cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = 30^\circ$$

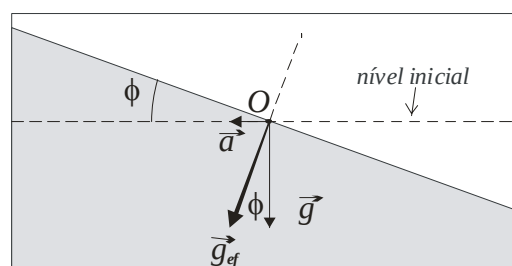


Fig. 18

Considere uma pequena porção de água. Como o caminhão acelera para a direita, então, em um referencial fixo no caminhão, devido à inércia, essa pequena porção de água sofrerá uma aceleração para a esquerda. Contudo, devido à presença do campo gravitacional, essa massa estará submetida à uma aceleração total $\vec{g}_{ef}$, que é a soma vetorial entre $\vec{a}$ e $\vec{g}$.

A superfície da água deve ser perpendicular à $\vec{g}_{ef}$, pois se isto não ocorresse, dois pontos à mesma profundidade (em relação à linha d'água) estariam com pressões diferentes e conseqüentemente haveria um fluxo de líquido entre eles. Realmente isto ocorre durante um curto intervalo de tempo, mas na situação estacionária o fluxo cessa, de modo que as pressões são as mesmas.

A nova linha d'água é obtida girando o nível inicial em torno de um eixo que passa pelo centro deste nível (ponto O da figura), pois a massa de água deslocada abaixo da linha d'água inicial deve ser igual à massa deslocada acima desta linha. Assim, como a moeda está na parte central do tanque, sua distância até o ponto O não é alterada.

Por fim, da figura podemos ver que $\text{tg } \phi = \frac{a}{g}$.

Assim $a = g \text{tg} 30^\circ$

Resulta $a = \frac{\sqrt{3}}{3} g$