

NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos	i : unidade imaginária; $i^2 = -1$
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais	$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais	$\bar{z}$: conjugado do número complexo $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros	$ z $: módulo do número complexo $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	$\text{Re } z$: parte real de $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	$\text{Im } z$: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$\emptyset$: conjunto vazio	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$\det A$: determinante da matriz A	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
A^{-1} : inversa da matriz A	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$\binom{a}{b}$: combinação de a elementos, b a b , onde a e b são inteiros maiores ou iguais a zero	
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B	
$\mathcal{P}(X)$: conjunto de todos os subconjuntos de X	
$n(X)$: número de elementos do conjunto X (X finito)	

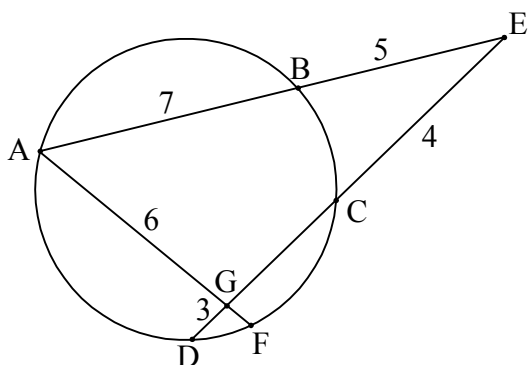
Obs.: São cartesianos ortogonais os sistemas de coordenadas considerados

1. Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A , e, C e D , respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G . Se $EB = 5$, $BA = 7$, $EC = 4$, $GD = 3$ e $AG = 6$, então GF vale

- | | |
|----------|----------|
| A. () 1 | B. () 2 |
| C. () 3 | D. () 4 |
| E. () 5 | |

Alternativa: D

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Potência do ponto E:
 $5 \cdot (5 + 7) = 4 \cdot (4 + GC + 3) \therefore GC = 8$

Potência do ponto G:
 $3 \cdot GC = 6 \cdot GF \therefore 3 \cdot 8 = 6 \cdot GF \therefore \boxed{GF = 4}$.



- E. () $-2\pi/15$

- E. () $(-\infty, +\infty)$

Alternativa: A

Admitindo-se que o candidato responda às 10 questões escolhendo apenas uma das alternativas em cada questão, o número de maneiras para escolher 7 dentre as 10 questões é dado pela combinação simples C_{10}^7 .

Como o candidato errará 3 questões e há 4 possibilidades de erro para cada uma delas, teremos:

$$4^3 \cdot C_{10}^7 = \boxed{4^4 \cdot 30}.$$

7. Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8(4^k \sqrt{2})$:

- I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita
- II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão $2/3$
- III. $S = 3451$
- IV. $S \leq 3434 + \log_8 \sqrt{2}$

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

- A. ☐ I e III
- B. ☐ II e III
- C. ☐ II e IV
- D. ☐ II
- E. ☐ III

Alternativa: B

Seja $a_k = \log_8(4^k \sqrt{2})$ o termo geral da sequência (a_k) , onde S é a soma dos seus 102 primeiros termos.

$$a_k = \log_8(8^{\frac{2k}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{6}}) = \frac{2k}{3} + \frac{1}{6}$$

Portanto, (a_k) é uma progressão aritmética de 102 termos com termo inicial $\frac{1}{6}$ e razão $\frac{2}{3}$.

Fazendo $k = 101$, teremos que o último termo desta P.A. é $\frac{405}{6}$.

$$\text{Assim, } S = \frac{102}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{405}{6} \right) = 51 \cdot \frac{406}{6} \therefore S = 3451$$

$$S > 3434 + \log_8 \sqrt{2} = 3434 + \frac{1}{6}$$

Portanto, temos (I) e (IV) falsas e (II) e (III) verdadeiras.

8. Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

- A. ☐ 1
- B. ☐ $2z$
- C. ☐ $2 \operatorname{Re} z$
- D. ☐ $2 \operatorname{Im} z$
- E. ☐ $2|z|^2$

Alternativa: C

A partir de $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$:

$$|f(z) - f(1)|^2 = |z - 1|^2 \therefore (f(z) - f(1)) \cdot \overline{(f(z) - f(1))} = (z - 1) \cdot \overline{(z - 1)}$$

$$(f(z) - f(1)) \cdot (\overline{f(z)} - \overline{f(1)}) = (z - 1) \cdot (\overline{z} - 1)$$

$$f(z) \cdot \overline{f(z)} - f(z) \cdot \overline{f(1)} - f(1) \cdot \overline{f(z)} + f(1) \cdot \overline{f(1)} = z \cdot \overline{z} - z - \overline{z} + 1$$

$$|f(z)|^2 - f(z) \cdot \overline{f(1)} - f(1) \cdot \overline{f(z)} + |f(1)|^2 = |z|^2 - z - \overline{z} + 1 \quad (I)$$

Como $|f(z)| = |z|$, temos: $|f(z)|^2 = |z|^2$ e $|f(1)|^2 = |1|^2 = 1$

Substituindo na expressão (I):

$$|z|^2 - f(z) \cdot \overline{f(1)} - f(1) \cdot \overline{f(z)} + 1 = |z|^2 - z - \overline{z} + 1 \therefore f(z) \cdot \overline{f(1)} + f(1) \cdot \overline{f(z)} = z + \overline{z} = \boxed{2\operatorname{Re}(z)}.$$

9. O conjunto solução de $(\operatorname{tg}^2 x - 1) \cdot (1 - \operatorname{cotg}^2 x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, é

A. () $\{\pi/3 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

B. () $\{\pi/4 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

C. () $\{\pi/6 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

D. () $\{\pi/8 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

E. () $\{\pi/12 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

Alternativa: D

$$(\operatorname{tg}^2 x - 1) \cdot (1 - \operatorname{cotg}^2 x) = 4 \therefore \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) = 4$$

$$(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 = (2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2 \therefore \cos^2 2x = \operatorname{sen}^2 2x \therefore \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x} = 1 \therefore \operatorname{tg} 2x = \pm 1$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}}.$$

10. Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que

$(z/|z|)^n = i \operatorname{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que

A. () $2n\alpha$ é múltiplo de 2π

B. () $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π

C. () $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$

D. () $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2

E. () $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π

Alternativa: B

Colocando z na forma trigonométrica, temos: $z = |z| \cdot \operatorname{cis} \alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\left(\frac{z}{|z|} \right)^n = i \operatorname{sen}(n\alpha) \therefore \left(\frac{|z| \cdot \operatorname{cis} \alpha}{|z|} \right)^n = i \operatorname{sen}(n\alpha) \therefore (\operatorname{cis} \alpha)^n = i \operatorname{sen}(n\alpha) \therefore \operatorname{cis}(n\alpha) = i \operatorname{sen}(n\alpha)$$

$$\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha) = i \operatorname{sen}(n\alpha) \therefore \cos(n\alpha) = 0 \therefore n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \therefore 2n\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore 2n\alpha - \pi = k \cdot (2\pi), k \in \mathbb{Z}. \text{ Portanto, } \boxed{2n\alpha - \pi \text{ é múltiplo de } 2\pi}.$$

11. A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases} \quad \text{é}$$

A. ☐ $a - b \neq 2$

B. ☐ $a + b = 10$

C. ☐ $4a - 6b = 0$

D. ☐ $a/b = 3/2$

E. ☐ $a \cdot b = 24$

Alternativa: A

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{R}_2 - \text{R}_1 \\ \text{R}_3 - 2\text{R}_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ (a-6)z = b-4 \end{cases}$$

Para que o sistema seja incompatível (impossível), devemos ter: $a = 6$ e $b \neq 4$

Portanto, $a - b \neq 2$.

12. Se $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

A. ☐ 0

B. ☐ 4

C. ☐ 8

D. ☐ 12

E. ☐ 16

Alternativa: D

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{(-1)} + (-2) \cdot 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix}}_0 = (-12) \cdot (-1) = \boxed{12}.$$

13. Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite $1 - i$ como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e -40 . Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

- A. () $3/2 - \sqrt{193}/6, 3, 3/2 + \sqrt{193}/6$ B. () $2 - 4\sqrt{13}, 2, 2 + 4\sqrt{13}$
 C. () $-4, 2, 8$ D. () $-2, 3, 8$
 E. () $-1, 2, 5$

Alternativa: E

Como a equação possui coeficientes reais, então $1 - i$ e $1 + i$ são raízes duplas.

As três raízes restantes são reais e formam uma P.A.: $(x_1; x_2; x_3) = (a - R; a; a + R)$

Soma das raízes = $1 - i + 1 - i + 1 + i + 1 + i + a - R + a + a + R = 10 \therefore 3a + 4 = 10 \therefore a = 2$

Produto das raízes = $(1 - i) \cdot (1 - i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (2 - R) \cdot 2 \cdot (2 + R) = -40 \therefore R^2 = 9 \therefore R = \pm 3$

Assim, as três raízes reais são $\boxed{-1, 2 \text{ e } 5}$.

14. Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

- A. () $x = 2$ não é raiz de p
 B. () p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais
 C. () p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira
 D. () p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras
 E. () p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais

Alternativa: E

$p(2) = 0$. Logo, 2 é raiz de $p(x)$.

Dividindo $p(x)$ por $(x - 2)$, vem a equação equivalente:

$$(x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1) = 0$$

A equação $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ é recíproca de 1ª classe.

Transformando-a em $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ e fazendo $x + \frac{1}{x} = y$, vem a resolvente:

$$y^2 + 2y - 3 = 0, \text{ onde } y = 1 \text{ ou } y = -3$$

Para $y = 1$, vem $x + \frac{1}{x} = 1$, onde $x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Para $y = -3$, vem $x + \frac{1}{x} = -3$, onde $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

O conjunto solução da equação é $S = \left\{ 2, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Logo, $\boxed{p \text{ admite 3 raízes reais, sendo uma inteira e as outras duas irracionais}}$.

15. Seja o sistema linear nas incógnitas x e y , com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a-b)x - (a+b)y = 1 \\ (a+b)x + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

- I. O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$
- II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos
- III. $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$

Então pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

- A. () I
- B. () II
- C. () III
- D. () I e II
- E. () II e III

Alternativa: E

Calculando os determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a-b & -(a+b) \\ a+b & (a-b) \end{vmatrix} = (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -(a+b) \\ 1 & (a-b) \end{vmatrix} = 2a \therefore x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a+b & 1 \end{vmatrix} = -2b \therefore y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Logo:

- I. *Falsa*, pois para $a = b = 0$ o sistema é incompatível.
- II. *Verdadeira*, pois para o sistema ser possível e determinado: $D = 2(a^2 + b^2) \neq 0 \Leftrightarrow a$ e b não são simultaneamente nulos.

III. *Verdadeira*, pois $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$, com $a^2 + b^2 \neq 0$.

16. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a+1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a , para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

- A. () $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$
- B. () $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$
- C. () $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$
- D. () $\{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$
- E. () $\mathbb{N}$

Alternativa: D

Como a soma dos coeficientes de $p(x)$ é zero, 1 é raiz de $p(x)$.

Seja $\{1, m, n\}$ o conjunto das raízes de $P(x)$, com $n \in \mathbb{Z}_+$ e $m \in \mathbb{Z}_-$. Das relações de Girard, vem:

$1 + m + n = 0 \therefore m = -(n+1)$ e $1 \cdot m \cdot n = -a$, ou seja, $a = (n+1) \cdot n$, com $n \in \mathbb{N}$.



- E. () $30/(2+\sqrt{3})$

pois os hexágonos são semelhantes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1-q} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}}}{1-\frac{3}{4}} \therefore \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} A_n = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2}.$$

- E. () $\left(\frac{75}{12}, \frac{91}{12}\right)$

9

Assim: $\frac{|5 \cdot (-2) + 12 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} < 4 \Rightarrow |-22 + a| < 52 \Rightarrow -52 < -22 + a < 52 \Rightarrow -30 < a < 74$

O ponto de interseção de p com o eixo Oy possui coordenadas $\left(0, -\frac{a}{12}\right)$.

Assim, a ordenada desse ponto pertence ao intervalo $\left[-\frac{74}{12}, \frac{30}{12}\right]$.

19. Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos $A(0, 9)$ e $B(x, 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B , F_1 e F_2 é igual a

A. () $22\sqrt{10}$

B. () $18\sqrt{10}$

C. () $15\sqrt{10}$

D. () $12\sqrt{10}$

E. () $6\sqrt{10}$

Alternativa: D

A distância focal é $2c = 12$, ou seja, $c = 6$ e o semi-eixo maior é $a = 9$.

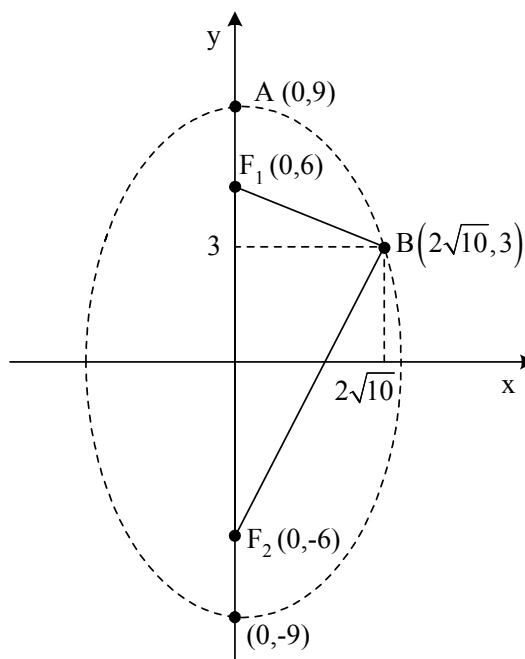
De $a^2 = b^2 + c^2$, temos: $9^2 = b^2 + 6^2 \therefore b^2 = 45$ e a equação da elipse ε fica:

$$(\varepsilon): \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1$$

Como $B(x, 3) \in \varepsilon$, temos:

$$\frac{x^2}{45} + \frac{3^2}{81} = 1 \therefore x = 2\sqrt{10}, \text{ uma vez que } x > 0.$$

$$A_{\Delta F_1 F_2 B} = \frac{F_1 F_2 \cdot x}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{10}}{2} = \therefore \boxed{A_{\Delta F_1 F_2 B} = 12\sqrt{10}}.$$



20. Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm^2 , é

A. () $81\sqrt{3}/2$

B. () $81\sqrt{2}/2$

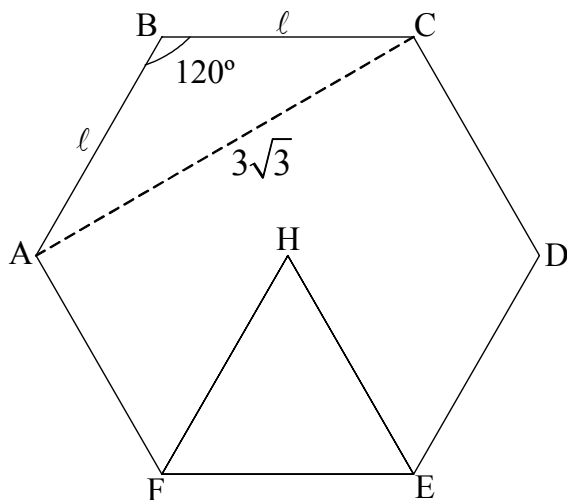
C. () $81/2$

D. () $27\sqrt{3}$

E. () $27\sqrt{2}$

Alternativa: A

Observe o hexágono regular ABCDEF, onde $AC = 3\sqrt{3}$ cm:



Para o $\triangle ABC$:

$$(3\sqrt{3})^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos 120^\circ \therefore l = 3 \text{ cm}$$

Assim, a área do hexágono (base da pirâmide) é:

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

O triângulo equilátero HFE é projeção ortogonal da face lateral VFE, onde V é o vértice da pirâmide. Como o ângulo diedro é 60° , temos que:

$$A_{\text{face lateral}} \cdot \cos 60^\circ = A_{\triangle HFE} \therefore 6 \cdot A_{\text{face lateral}} \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot A_{\triangle HFE} \therefore A_{\text{lateral}} \cdot \frac{1}{2} = A_{\text{base}} \therefore A_{\text{lateral}} = 2 \cdot A_{\text{base}}$$

Portanto, a área total da pirâmide é:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = A_{\text{base}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 3 \cdot A_{\text{base}} \therefore A_{\text{total}} = \frac{81\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$$

21. Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{P}(A)$ é uma **partição de A** se as seguintes condições são satisfeitas:

- I. $A_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, m$
- II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i, j = 1, \dots, m$
- III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$

Dizemos ainda que $\mathcal{F}$ é uma partição **de ordem k** se $n(A_i) = k, i = 1, \dots, m$.

Supondo que $n(A) = 8$, determine:

- (a) As ordens possíveis para uma partição de A
- (b) O número de partições de A que têm ordem 2

Resolução:

(a) De acordo com as condições (II) e (III) podemos concluir que

$$n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_m) = n(A).$$

Assim, para que $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ seja uma partição de ordem k devemos ter:

$$\underbrace{k + k + \dots + k}_{m \text{ vezes}} = 8, \text{ ou seja, } k \text{ é divisor de } 8. \text{ Então, são 4 as possíveis ordens de } \mathcal{F}: \boxed{1, 2, 4, 8}.$$

(b) O número de partições distintas de A que têm ordem 2 é $\frac{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{4!} = \boxed{105}.$

22. Seja $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x-1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$.

Seja $g : (-1/2, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x+1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1-f(x+1/2), & 0 \leq x < 1/2 \end{cases}$, com f definida acima.

Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

Resolução:

Sem perda de generalidade, podemos supor que $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Teremos:

$$g(x) = 1 - f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1 - \left[2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) - 1\right] = 1 - 2x, \text{ pois } \left(x + \frac{1}{2}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$g(-x) = f\left(-x + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-x + \frac{1}{2}\right) = 1 - 2x = g(x), \text{ pois } \left(-x + \frac{1}{2}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Assim, $\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, temos $g(x) = g(-x)$.

Logo, g é par.

23. Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

Resolução:

O coeficiente de x^4 em $(1 + x + x^2)^9$ é dado por: $\binom{9}{p} \cdot \binom{9-p}{k}$, (Expansão Polinomial de Leibniz), para valores de p e k tais que $p + 2k = 4$, com $p, k \in \mathbb{N}$.

Logo, os possíveis valores para p e k :

$$p = 0 \text{ e } k = 2$$

$$p = 2 \text{ e } k = 1$$

$$p = 4 \text{ e } k = 0$$

Portanto, o coeficiente de x^4 é $\binom{9}{0} \cdot \binom{9}{2} + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{1} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{0} = \boxed{414}$.

24. Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade

$$\log_{\cos x} (4\sin^2 x - 1) - \log_{\cos x} (4 - \sec^2 x) > 2.$$

Resolução:

Condições de existência dos logaritmos:

• Para os logaritmandos devemos ter:

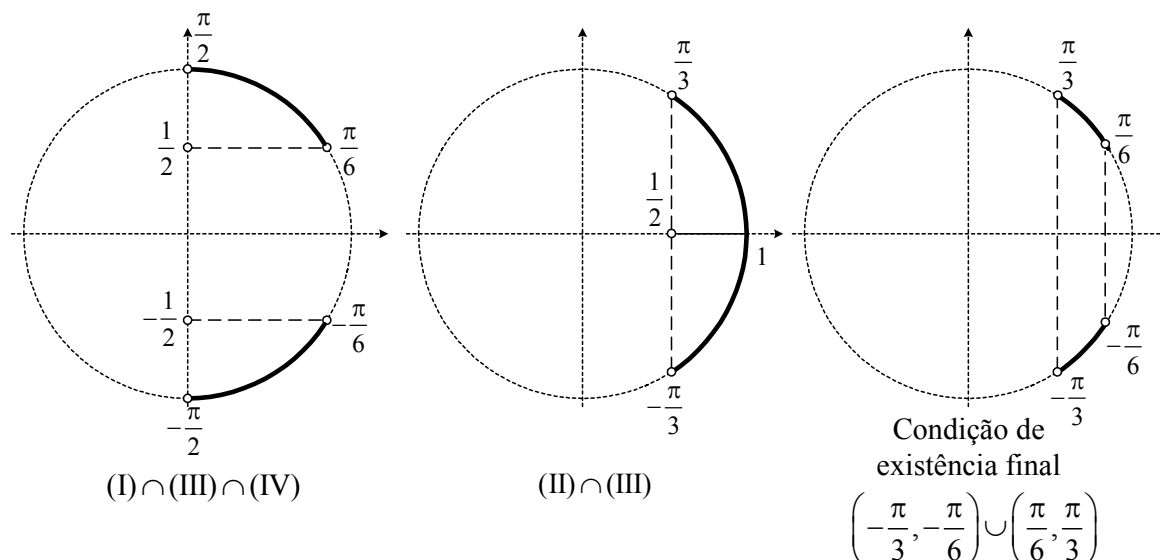
$$4\sin^2 x - 1 > 0 \therefore \sin^2 x > \frac{1}{4} \therefore \sin x > \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x < -\frac{1}{2} \quad (\text{I})$$

$$4 - \sec^2 x > 0 \therefore \sec^2 x < 4 \therefore \cos^2 x > \frac{1}{4} \therefore \cos x > \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x < -\frac{1}{2} \quad (\text{II})$$

- Para as bases devemos ter: $0 < \cos x < 1$ (III)

Hipótese do problema: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (IV)

Fazendo a interseção das condições acima, temos:



Do enunciado:

$$\log_{\cos x} \frac{4\sin^2 x - 1}{4 - \sec^2 x} > 2 \therefore \frac{4\sin^2 x - 1}{4 - \sec^2 x} < \cos^2 x \therefore 4\sin^2 x - 1 < 4\cos^2 x - \sec^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$4\sin^2 x - 1 < 4\cos^2 x - 1 \therefore \sin^2 x < \cos^2 x \therefore \tan^2 x < 1 \therefore |\tan x| < 1 \therefore -1 < \tan x < 1 \therefore x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \quad (V)$$

A solução final da inequação é a interseção da condição de existência final com a condição (V).

Assim: $S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

- 25.** Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

“Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais.”

Resolução:

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de $p(x)$ e x_1 a raiz racional.

Sem perda de generalidade, podemos supor $(x_1 - x_2) = q \in \mathbb{Q}$ ou $(x_2 - x_3) = q \in \mathbb{Q}$.

No 1º caso, se $x_1 - x_2 = q$ então $x_2 = x_1 - q \in \mathbb{Q}$.

Pela relação entre coeficientes e raízes: $x_1 + x_2 + x_3 = -a \therefore x_3 = -a - x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$, pois $a, x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$.

Logo, todas as raízes são racionais.

No 2º caso, se $x_2 - x_3 = q$, temos, pelas relações entre coeficientes e raízes: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$.

Somando ambas as equações: $x_1 + 2x_2 = q - a \therefore x_2 = \frac{q - a - x_1}{2} \in \mathbb{Q}$, pois $a, q, x_1 \in \mathbb{Q}$.

De $x_1 + x_2 + x_3 = -a \therefore x_3 = (-a - x_1 - x_2) \in \mathbb{Q}$, pois $a, x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$.

Logo, todas as raízes são racionais.

Dessa maneira, a afirmação é verdadeira.

- 26.** As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2 .

Resolução:

Seja $h - 2$, h , $h + 2$ as respectivas medidas do raio, da altura e da geratriz, temos:

$$(h + 2)^2 = h^2 + (h - 2)^2 \therefore h = 0 \text{ (não convém)} \text{ ou } h = 8 \text{ m.}$$

De $h = 8$ m vem $g = 10$ m e $r = 6$ m.

A área total do cone é dada por $A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r) = \pi \cdot 6 \cdot (10 + 6)$

Logo, $A_T = 96\pi \text{ m}^2$.

- 27.** Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

Resolução:

Do enunciado:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } C = (A + B)^{-1}$$

$$\text{Assim, } c_{34} = \frac{1}{\det(A + B)} \cdot \text{cof}_{43}(A + B).$$

$\text{cof}_{43}(A + B)$ indica o cofator da linha 4 e coluna 3 da matriz $(A + B)$, isto é:

$$\text{cof}_{43}(A + B) = (-1)^{(4+3)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

$$\det(A + B) = 2 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-18) + 5 \cdot (27) = 99$$

$$\text{Portanto, } c_{34} = \frac{1}{99} \cdot (-18) \therefore c_{34} = -\frac{2}{11}.$$

- 28.** Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r , em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

Resolução:

Do enunciado, temos:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots = \frac{a_2}{1-r^2} = \frac{a \cdot r}{1-r^2} = 4 \quad (\text{I})$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + \dots = \frac{a_3}{1-r^3} = \frac{a \cdot r^2}{1-r^3} = \frac{16}{13} \quad (\text{II})$$

Dividindo (I) por (II) vem:

$$\frac{a \cdot r}{(1-r) \cdot (1+r)} \cdot \frac{(1-r) \cdot (1+r+r^2)}{a \cdot r^2} = \frac{13}{4} \therefore 9r^2 + 9r - 4 = 0 \therefore r = \frac{1}{3}, \text{ uma vez que } r > 0.$$

Substituindo $r = \frac{1}{3}$ em (I):

$$\frac{a \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = 4 \therefore a = \frac{32}{3} \therefore a + r = \frac{32}{3} + \frac{1}{3}$$

Portanto, $\boxed{a + r = 11}$.

- 29.** Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Resolução:

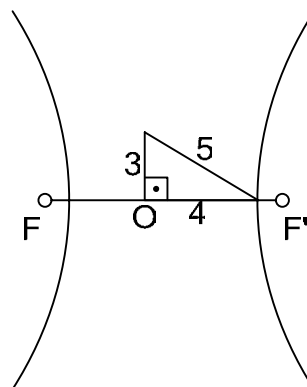
Da equação da hipérbole, vem: $9(y^2 - 16y) - 16(x^2 - 14x) = 352$

Daí: $9(y^2 - 16y + 64) - 16(x^2 - 14x + 49) = 352 + 576 - 784 \therefore 9(y-8)^2 - 16(x-7)^2 = 144$

A fórmula reduzida é:

$\frac{(y-8)^2}{16} - \frac{(x-7)^2}{9} = 1$, que caracteriza a hipérbole de centro $(8, 7)$ e semi-eixos 4 e 3, representada ao lado.

De $OF = OF' = 5$, vem $\boxed{FF' = 10}$.



- 30.** Considere um losango $ABCD$ cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm . Calcule a área, em cm^2 , do círculo inscrito neste losango.

Resolução:

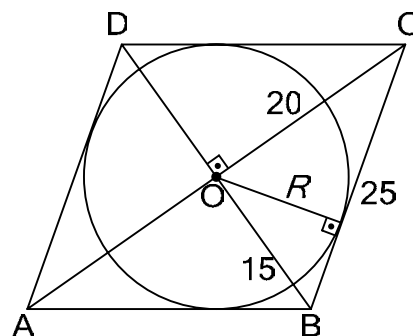
Considere o losango $ABCD$ de perímetro 100 cm . Assim, cada um de seus lados mede 25 cm .

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si nos respectivos pontos médios. Logo, $OC = OA = 20\text{ cm}$.

No $\triangle OBC$ temos:

$OB = 15\text{ cm}$ (Teorema de Pitágoras) e $25 \cdot R = 20 \cdot 15 \therefore R = 12\text{ cm}$

Área do círculo é $A = \pi(12)^2 \therefore \boxed{A = 144\pi\text{ cm}^2}$.

**Comentário da prova de Matemática**

Foi uma prova bem elaborada, abrangente, apresentando porém algumas questões trabalhosas (24 de trigonometria e 27 de matrizes).

Como de costume, apresentou em seu todo um grau de dificuldade adequado à seleção dos melhores candidatos ao ITA. As questões 2 e 21 verificam de modo interessante o conhecimento sobre a teoria dos conjuntos. De um modo geral, foi uma boa prova que, com exercícios de qualidade, avaliou conhecimentos relevantes para um bom desempenho no curso superior.

**POLIEDRO****O CURSINHO QUE MAIS ENTENDE DE IME E ITA**