

MATEMÁTICA

1. Dada a função $f(x) = \frac{(156^x + 156^{-x})}{2}$, demonstre que: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

Resolução

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \frac{1}{2}(156^{x+y} + 156^{-(x+y)}) + \frac{1}{2}(156^{x-y} + 156^{-(x-y)}) \\ &= \frac{1}{2}(156^x \cdot 156^y + 156^{-x} \cdot 156^{-y} + 156^x \cdot 156^{-y} + 156^{-x} \cdot 156^y) \\ &= \frac{1}{2}[(156^x \cdot 156^y + 156^x \cdot 156^{-y}) + (156^{-x} \cdot 156^{-y} + 156^{-x} \cdot 156^y)] \\ &= \frac{1}{2}[156^x(156^y + 156^{-y}) + 156^{-x}(156^y + 156^{-y})] \\ &= \frac{1}{2}(156^x + 156^{-x}) \cdot (156^y + 156^{-y}) \\ &= 2 \cdot \frac{156^x + 156^{-x}}{2} \cdot \frac{156^y + 156^{-y}}{2} \\ &= 2 \cdot f(x) \cdot f(y) \end{aligned}$$

2. O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

- a senha utilizada possui 4 dígitos;
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
0		

Teclado numérico

Resolução

De acordo com o enunciado podemos escolher o primeiro e o último dígitos em uma das seguintes linhas:

2ª linha: $\frac{3}{4} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{3}{4} \longrightarrow 81 \text{ senhas}$

5 2 2 5

6 3 3 6

ou

Como a segunda equação possui coeficientes inteiros, as eventuais raízes irracionais da forma $a \pm b\sqrt{c}$ aparecerão em pares conjugados. Vamos verificar a divisibilidade:

$$\begin{array}{r} x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 \quad | \quad x^2 - 2x - 2 \\ -x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ \hline -10x^3 - 42x^2 - 32x \\ 10x^3 - 20x^2 - 20x \\ \hline -62x^2 - 52x - 52 \\ 62x^2 - 124x - 124 \\ \hline -176x - 176 \end{array}$$

Como o resto da divisão não é zero, concluímos que $1 \pm \sqrt{3}$ não são raízes da segunda equação.

Conclusão final: Os dois polinômios não possuem raízes comuns.

5. Resolva a equação $2 \operatorname{sen} 11x + \cos 3x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 3x = 0$.

Resolução

Dividindo ambos os membros por 2:

$$\operatorname{sen} 11x + \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 3x = 0 \quad \therefore \quad \operatorname{sen} 11x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cdot \cos 3x + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen} 3x = 0$$

$$\operatorname{sen} 11x + \operatorname{sen} \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

Transformando em produto:

$$2 \operatorname{sen} \left(7x + \frac{\pi}{12} \right) \cdot \cos \left(4x - \frac{\pi}{12} \right) = 0$$

Teremos dois casos:

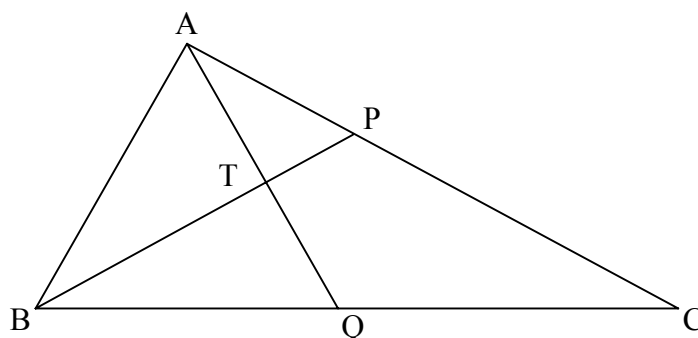
$$\text{I) } \operatorname{sen} \left(7x + \frac{\pi}{12} \right) = 0 \Rightarrow 7x + \frac{\pi}{12} = k\pi \therefore x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou

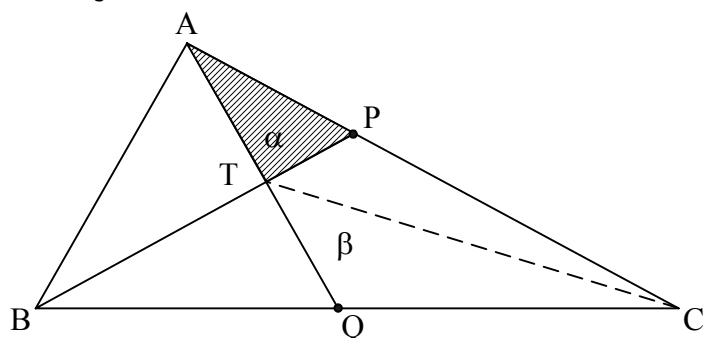
$$\text{II) } \cos \left(4x - \frac{\pi}{12} \right) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \therefore x = \frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Portanto, } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

6. Considere um triângulo ABC de área S . Marca-se o ponto P sobre o lado AC tal que $\overline{PA}/\overline{PC} = q$, e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que $\overline{QB}/\overline{QC} = r$. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine a área do triângulo ATP em função de S , q e r .



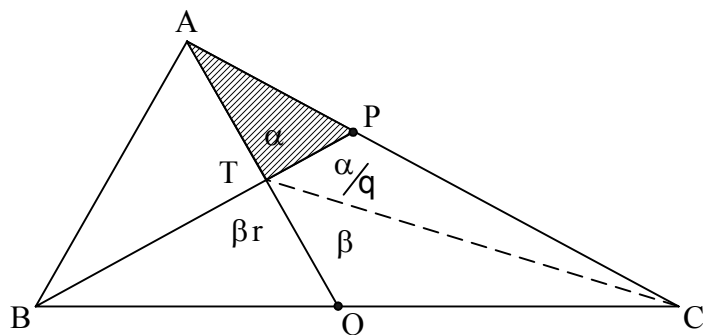
Resolução



Seja α a área do ΔATP e β a área do ΔTQC .

ΔATP e ΔPTC possuem a mesma altura. Assim: $\frac{\alpha}{A_{PTC}} = \frac{PA}{PC} \therefore A_{PTC} = \frac{\alpha}{q}$

ΔTQC e ΔTQB possuem a mesma altura. Assim: $\frac{\beta}{A_{TQB}} = \frac{QC}{QB} \therefore A_{TQB} = \beta r$



ΔAQC e ΔABC possuem a mesma altura. Assim: $\frac{S}{\alpha + \beta + \frac{\alpha}{q}} = \frac{BC}{QC} \therefore$

$$S = \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha}{q} \right) \cdot \left(\frac{BQ + QC}{QC} \right) \therefore S = \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha}{q} \right) \cdot \left(\frac{BQ}{QC} + 1 \right) \therefore \alpha + \beta + \frac{\alpha}{q} = \frac{S}{r+1} \quad (1)$$

ΔBPC e ΔABC possuem a mesma altura. Assim: $\frac{S}{\beta + \beta r + \frac{\alpha}{q}} = \frac{AC}{PC} \therefore$

$$S = \left(\beta + \beta r + \frac{\alpha}{q} \right) \cdot \left(\frac{AP + PC}{PC} \right) \therefore S = \left(\beta + \beta r + \frac{\alpha}{q} \right) \cdot \left(\frac{AP}{PC} + 1 \right) \therefore$$

$$S = \left(\beta + \beta r + \frac{\alpha}{q} \right) \cdot (q+1) \therefore \beta + \beta r + \frac{\alpha}{q} = \frac{S}{q+1} \quad (2)$$

Com as equações 1 e 2, teremos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha \left(1 + \frac{1}{q} \right) + \beta = \frac{S}{r+1} \\ \alpha \left(\frac{1}{q} \right) + \beta(1+r) = \frac{S}{q+1} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{q} & 1 \\ \frac{1}{q} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S}{r+1} \\ \frac{S}{q+1} \end{bmatrix}$$

Encontrando o valor de α por Cramer temos:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \frac{S}{r+1} & 1 \\ \frac{S}{q+1} & 1+r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{q} & 1 \\ \frac{1}{q} & 1+r \end{vmatrix}} = \frac{S - \frac{S}{q+1}}{\left(\frac{q+1}{q}\right)(1+r) - \frac{1}{q}} = \frac{S \cdot \left(\frac{q+1-1}{q+1}\right)}{\frac{q+qr+1+r-1}{q}} = \frac{\frac{S \cdot q}{q+1}}{\frac{q+qr+r}{q}} = \boxed{\frac{Sq^2}{(q+1)(q+r+qr)}}$$

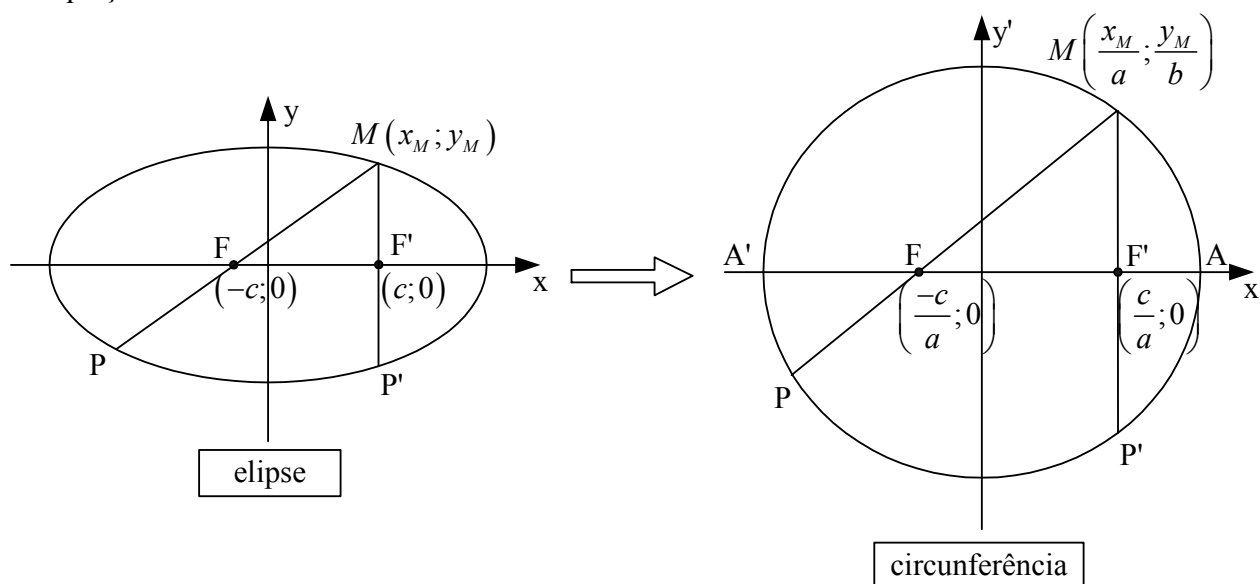
- 7.** Considere uma elipse de focos F e F' , e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes $\overline{MF}$ e $\overline{MF}'$, que interceptam a elipse em P e P' , respectivamente. Demonstre que a soma $(\overline{MF}/\overline{FP}) + (\overline{MF}'/\overline{F'P'})$ é constante.

Sugestão: calcule inicialmente a soma $(1/\overline{MF}) + (1/\overline{FP})$.

Resolução

Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Através da transformação $x' = \frac{x}{a}$ e $y' = \frac{y}{b}$, obtemos $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, ou seja $(x')^2 + (y')^2 = 1$, que é a equação de uma circunferência.



Utilizando potência de ponto na circunferência, temos:

$$(MF) \cdot (FP) = (A'F) \cdot (FA) \therefore (MF) \cdot (FP) = \left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \therefore (MF) \cdot (FP) = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$(MF') \cdot (F'P') = (AF') \cdot (F'A) \therefore (MF') \cdot (F'P') = \left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \therefore (MF') \cdot (F'P') = \frac{b^2}{a^2}$$

Calculando o valor da expressão pedida, temos: $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} = (MF)^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + (MF')^2 \cdot \frac{a^2}{b^2}$

$$= \frac{a^2}{b^2} \cdot ((MF)^2 + (MF')^2) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \left[\left(\frac{x_M}{a} + \frac{c}{a} \right)^2 + \left(\frac{y_M}{b} \right)^2 + \left(\frac{x_M}{a} - \frac{c}{a} \right)^2 + \left(\frac{y_M}{b} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{a^2}{b^2} \cdot \left[\left(\frac{x_M}{a} \right)^2 + \frac{2x_M c}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + \left(\frac{x_M}{a} \right)^2 - \frac{2x_M c}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2 \left(\frac{y_M}{b} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{a^2}{b^2} \cdot \left[2 \left(\frac{x_M}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{y_M}{b} \right)^2 + \frac{2c^2}{a^2} \right] = \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(2 + \frac{2c^2}{a^2} \right) = \frac{2a^2(a^2 + c^2)}{b^2 a^2} = \frac{2(a^2 + c^2)}{b^2} = \text{constante}$$

- 8.** Sejam a , b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.
- Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t .
 - Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k .

Resolução

- a. Como a , b e c são raízes, temos: $p(a) = p(b) = p(c) = 0$. Assim:

$$a^3 + r \cdot a - t = 0$$

$$b^3 + r \cdot b - t = 0$$

$$c^3 + r \cdot c - t = 0$$

Somando as equações, obtemos: $(a^3 + b^3 + c^3) + r(a + b + c) - 3t = 0$

Por Girard, tiramos de $p(x) = 0$ que $a + b + c = 0$

Assim: $a^3 + b^3 + c^3 + r \cdot 0 - 3t = 0 \therefore \boxed{a^3 + b^3 + c^3 = 3t}$

- b. Do item (a) sabemos que $a^3 + r \cdot a - t = 0$.

Multiplicando a equação por a^{n-2} , temos:

$$a^3 \cdot a^{n-2} + r \cdot a \cdot a^{n-2} - t \cdot a^{n-2} = 0 \therefore a^{n+1} + r \cdot a^{n-1} - t \cdot a^{n-2} = 0$$

Analogamente para as raízes b e c temos:

$$b^{n+1} + r \cdot b^{n-1} - t \cdot b^{n-2} = 0 \quad \text{e} \quad c^{n+1} + r \cdot c^{n-1} - t \cdot c^{n-2} = 0$$

Somando os três resultados:

$$(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) + r \cdot (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) - t \cdot (a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) = 0$$

Portanto, $S^{n+1} + r \cdot S^{n-1} - t \cdot S^{n-2} = 0$, para todo natural $n \geq 2$

9. Calcule o determinante da matriz $n \times n$ em função de b , onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccccc} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{array} \right]}_{n \text{ colunas}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccccc} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{array}} \right\} n \text{ linhas}$$

Resolução

Denotando por D_n o determinante de ordem n e desenvolvendo-o por Laplace para a 1ª coluna teremos:

$$D_n = (b^2+1) \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{array} \right]}_{D_{n-1}} - b \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{array} \right]}_{D'_{n-1}}$$

Calculando D'_{n-1} por Laplace para a 1ª linha:

$$D'_{n-1} = b \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{array} \right]}_{D_{n-2}}$$

Assim, teremos a seguinte recorrência:

$$D_n = (b^2+1) \cdot D_{n-1} - b^2 \cdot D_{n-2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n=1 \Rightarrow D_1 = b^2+1 = \frac{b^4-1}{b^2-1}$$

$$n=2 \Rightarrow D_2 = b^4+b^2+1 = \frac{b^6-1}{b^2-1}$$

$$n=3 \Rightarrow D_3 = b^6+b^4+b^2+1 = \frac{b^8-1}{b^2-1}$$

Assim, por indução finita:

$$\text{Hipótese: } D_k = \frac{b^{2k+2} - 1}{b^2 - 1} \text{ e } D_{k-1} = \frac{b^{2k} - 1}{b^2 - 1}$$

$$\text{Tese: } D_{k+1} = \frac{b^{2k+4} - 1}{b^2 - 1}$$

$$D_{k+1} = (b^2 + 1) \cdot D_k - b^2 \cdot D_{k-1}$$

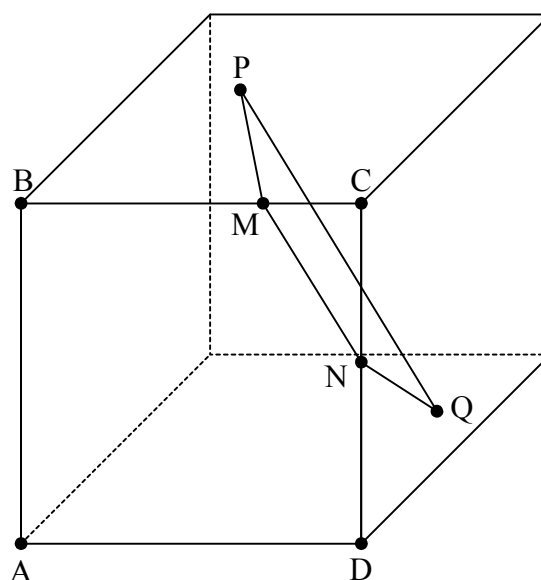
$$D_{k+1} = (b^2 + 1) \cdot \frac{(b^{2k+2} - 1)}{b^2 - 1} - b^2 \cdot \frac{b^{2k} - 1}{b^2 - 1}$$

$$D_{k+1} = \frac{b^{2k+4} - b^2 + b^{2k+2} - 1 - b^{2k+2} + b^2}{b^2 - 1}$$

$$D_{k+1} = \frac{b^{2k+4} - 1}{b^2 - 1}$$

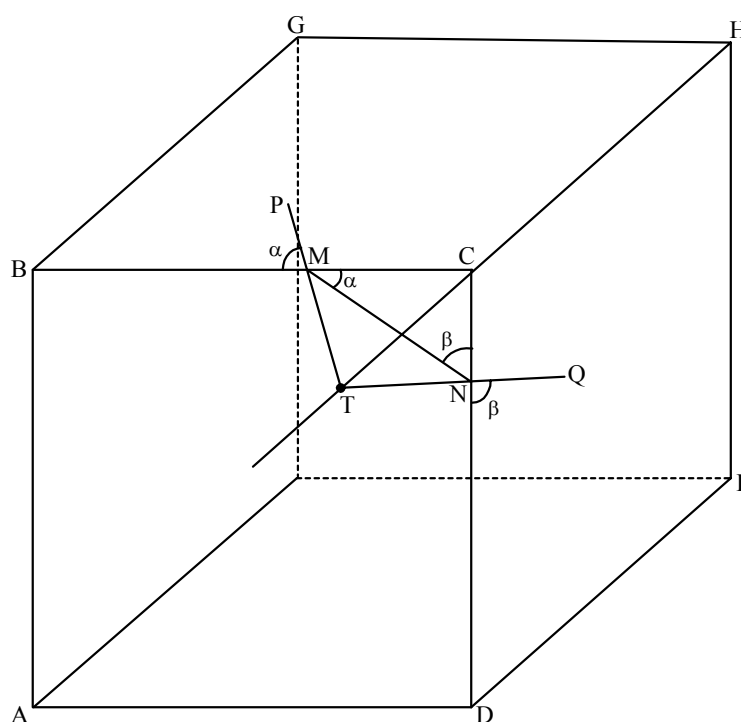
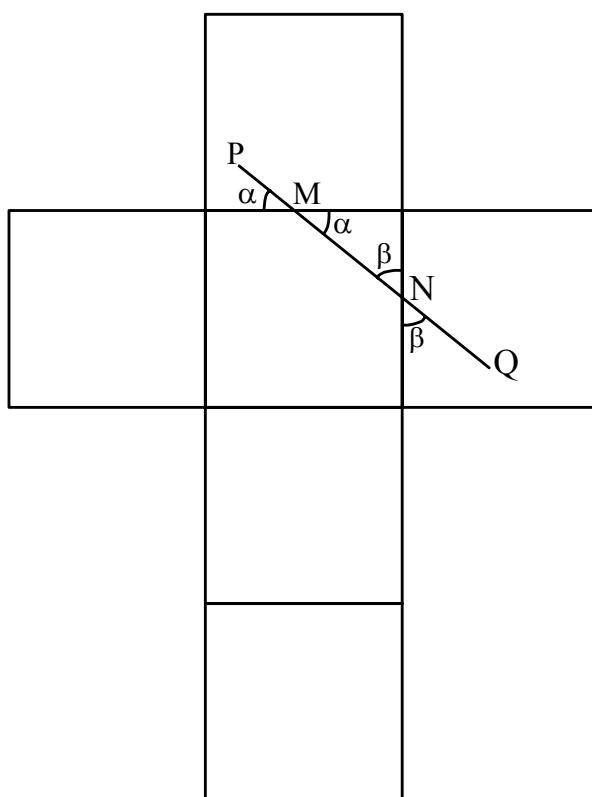
Portanto, $\boxed{D_n = \frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}}$

- 10.** Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.
- Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.
 - Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.



Resolução

a. Se o caminho é mínimo, na planificação do cubo P, M, N e Q estão alinhados:



Se P, M, N e Q são coplanares, PM e NQ se encontram num ponto T.

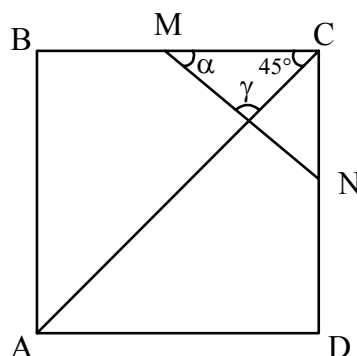
Como $\overline{PM} \subset \text{BCHG}$ e $\overline{NQ} \subset \text{CDIH}$, então T pertence a intersecção destes planos.

Logo T pertence a $\overline{CH}$.

Como $\widehat{TCN}$ vale β , então $\operatorname{tg} \beta = \frac{TC}{NC} \Rightarrow NC = \frac{TC}{\operatorname{tg} \beta}$

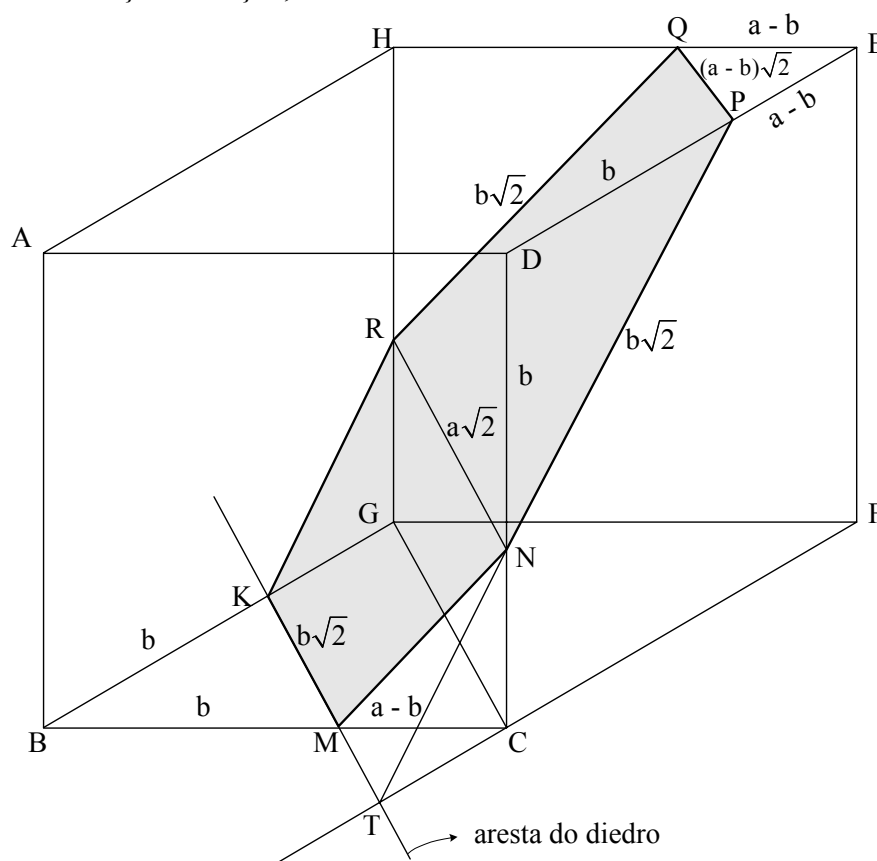
Como $\widehat{TCM}$ vale α , então $\operatorname{tg} \alpha = \frac{TC}{MC} \Rightarrow MC = \frac{TC}{\operatorname{tg} \alpha}$

Do $\triangle MNC$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NC}{MC} = \frac{TC}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{TC} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ$ e $\alpha = 45^\circ$



$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ$
Portanto, $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

b. Para melhor visualização da seção, invertamos as bases do cubo:

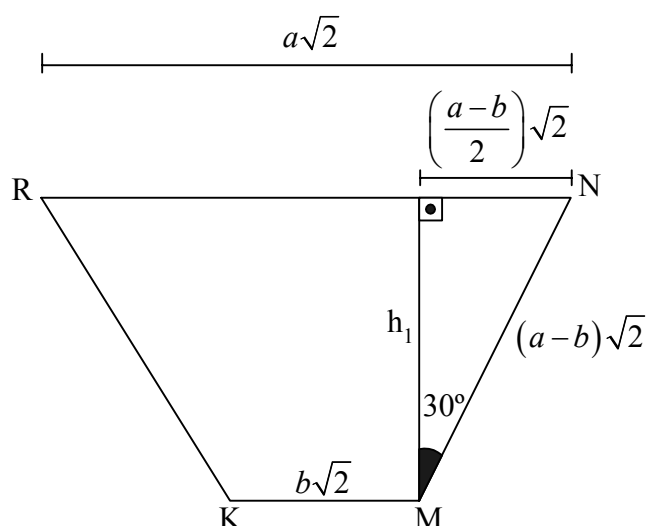


A construção da seção é feita tomando como base a reta $\overline{KM}$ como aresta do diedro.

O prolongamento da aresta $\overline{CF}$ intercepta a aresta do diedro em T. Como T e N pertencem à face DCFE, a aresta $\overline{TN}$ intercepta $\overline{DE}$ em P. Os pontos Q, R e K são simétricos em relação ao plano mediador ABFE.

A interseção do plano PQM com o cubo é o hexágono KMNPRQ.

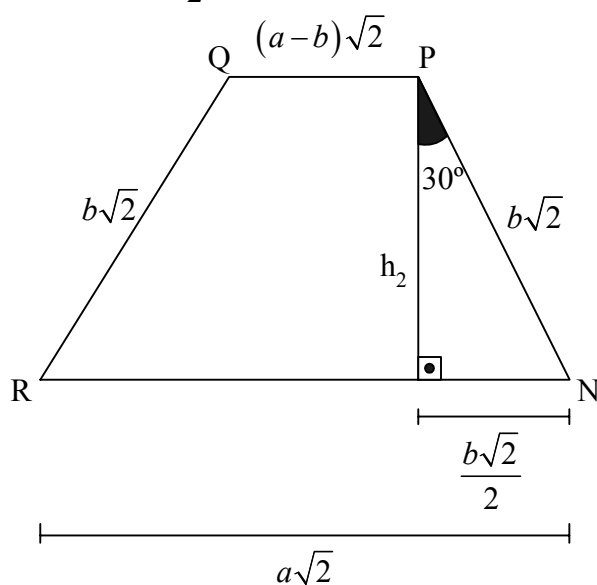
Para calcular a área da figura vamos utilizar os trapézios isósceles KMNR e NPQR.



$$\cos 30^\circ = \frac{h_1}{(a-b)\sqrt{2}}$$

$$h_1 = (a-b)\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h_1 = (a-b) \frac{\sqrt{6}}{2}$$



$$\cos 30^\circ = \frac{h_2}{b\sqrt{2}} \quad \therefore h_2 = b\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore h_2 = \frac{b\sqrt{6}}{2}$$

Logo, a área da secção PQRKMN é:

$$S = \left(\frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (a-b) \frac{\sqrt{6}}{2} + \left[\frac{(a-b)\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \frac{b\sqrt{6}}{2}$$

$$S = \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \right) \sqrt{3} + \left(\frac{2a-b}{2} \right) \cdot b\sqrt{3} = (a^2 - b^2 + 2ab - b^2) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S = (a^2 + 2ab - 2b^2) \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Comentários

A prova de Matemática do IME de 2005 já pode ser considerada como o exame mais difícil do Brasil.

Os assuntos abordados já eram previstos, pois tradicionalmente o IME pede questões de geometria plana, espacial, analítica, análise combinatória, equações algébricas e trigonometria.

Ressaltamos a falta de clareza do enunciado da questão 4, que afirmava que as equações possuíam raízes comuns, o que não ocorreu após a sua resolução.

Cumpre destacar o elevado grau de exigência de conhecimento e prática para a resolução das questões 7, 9 e 10.

No contexto geral a banca examinadora do IME com sua prova selecionou os candidatos mais bem preparados.



POLIEDRO
O CURSINHO QUE MAIS ENTENDE DE IME E ITA