

1. Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ ($n > 1$) termos de uma sequência. Determine, em função de n , os valores de r e s que tornam esta sequência uma progressão aritmética, sabendo que r e s são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

Resolução

Numa PA a razão R é dada por $a_{n+1} - a_n = R$.

Na PA em questão, tem-se a razão: $R = (r - s) + (r + s)i - (r + si) \therefore R = -s + ri$

Em qualquer PA, $a_n = a_1 + (n - 1)R$

No caso, vem: $r + si = (1 - i) + (n - 1)(-s + ri) \therefore r + si = (1 - ns + s) + (nr - r - 1)i$

Logo, temos o sistema:
$$\begin{cases} 1 - ns + s = r \\ nr - r - 1 = s \end{cases}$$

Cuja solução é: $r = \frac{n}{n^2 - 2n + 2}$ e $s = \frac{n - 2}{n^2 - 2n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

2. Considere o polinômio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30.$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

Resolução

$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$ possui as raízes complexas x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 e x_5

O produto de duas raízes complexas é $x_1 \cdot x_2 = 3 - i$; assim, x_3 e x_4 devem ser as raízes conjugadas de x_1 e x_2 .

Podemos escrever $x_3 \cdot x_4 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{(3 - i)} = 3 + i$

Temos: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = -30 \therefore (3 - i) \cdot (3 + i) \cdot x_5 = -30$ (Girard)

Assim, $10 \cdot x_5 = -30 \therefore x_5 = -3$

Dividindo $p(x)$ por $(x + 3)$:

-3	1	-3	-3	27	-44	30
	1	-6	15	-18	10	0

Obtemos a equação $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$, cujas raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 , são tais que:
 $x_1 \cdot x_2 = 3 - i$ e $x_3 \cdot x_4 = 3 + i$

Temos: $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = 15$ (Girard)

Substituindo $x_1 \cdot x_2$ e $x_3 \cdot x_4$, temos:

$$3 - i + 3 + i + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 = 15 \therefore x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 = 9$$

$$\therefore x_1 \cdot (x_3 + x_4) + x_2 \cdot (x_3 + x_4) = 9 \therefore (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) = 9$$

Por outra relação de Girard, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, daí o sistema:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) = 9 \\ (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 3$$

Sendo $x_1 \cdot x_2 = 3 - i$ e $x_1 + x_2 = 3$, vem a equação $a^2 - 3a + (3 - i) = 0$ com raízes x_1 e x_2 .

$$\text{Assim, } a = \frac{3 \pm (-3 + 4i)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3 \pm [(1 + 2i)^2]^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3 \pm (1 + 2i)}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} \text{ e } x_2 = \frac{3 - 1 - 2i}{2} \therefore x_1 = 2 + i \text{ e } x_2 = 1 - i$$

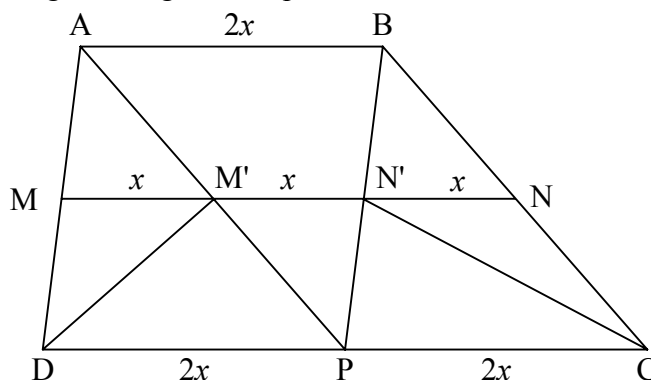
As outras raízes são suas conjugadas $2 - i$ e $1 + i$

O conjunto solução da equação $p(x) = 0$ é $\boxed{\{2 + i, 2 - i, 1 + i, 1 - i, -3\}}$

- 3.** Um trapézio ABCD, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem MM'N'N. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área do trapézio M'N'CD em função da área de ABCD.

Resolução

Seja o trapézio ABCD da figura a seguir, em que M e N são os extremos de sua base média.



Tem-se $\overline{AB} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{CD}$

Pelo teorema de Tales, $\overline{AM'} \cong \overline{M'P}$ e $\overline{BN'} \cong \overline{N'P}$

- M e M' são pontos médios dos lados do $\triangle ADP$
- M' e N' são pontos médios dos lados do $\triangle ABP$
- N' e N são pontos médios dos lados do $\triangle BPC$

Fazendo $MM' = M'N' = N'N = x$, vem $AB = DP = PC = 2x$
 Sendo h a altura do trapézio, então:

- A área do trapézio $M'N'CD$ é $S_{M'N'CD} = \left(\frac{x+4x}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} = \frac{5hx}{4}$
- A área do trapézio $ABCD$ é $S_{ABCD} = \left(\frac{2x+4x}{2}\right) \cdot h = 3hx$

$$\text{Logo, } \frac{S_{M'N'CD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5hx}{4}}{3hx} = \frac{5}{12} \Rightarrow S_{M'N'CD} = \frac{5}{12} S_{ABCD}$$

4. Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Determine D_n em função de n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$).

Resolução

Para $n = 1$, temos $D_1 = 2$

Para $n = 2$, temos $D_2 = 3$

Para $n = 3$, temos $D_3 = 4$

Hipótese de indução: $D_k = k + 1$ e $D_{k-1} = k$

Tese de indução: $D_{k+1} = k + 2$, com $k \geq 2$

Demonstração: desenvolvendo por Laplace para a 1ª linha, temos:

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{D_k} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{D'_k}$$

Desenvolvendo o determinante D'_k por Laplace para a 1ª coluna temos

$$D'_k = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = -D_{k-1}$$

Assim, $D_{k+1} = 2 \cdot D_k - 1 \cdot D_{k-1}$, mas, por hipótese, temos:

$$D_{k+1} = 2(k+1) - 1 \cdot (k) \quad \therefore \quad D_{k+1} = k + 2$$

Portanto, $\boxed{D_n = n + 1}$

A questão pode ser resolvida também através da recorrência. A partir do desenvolvimento por Laplace:

$$D_n - 2 \cdot D_{n-1} + D_{n-2} = 0, \text{ cuja equação característica é } x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

Como há raiz dupla, a solução é $D_n = (C_1 + n \cdot C_2) \cdot 1^n$, em que C_1 e C_2 são constantes.

Como $D_1 = 2$ e $D_2 = 3$, temos:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1 \text{ e } C_2 = 1$$

Logo, temos: $\boxed{D_n = n + 1}$

5. Determine os valores de x, y, z e r que satisfazem o sistema

$$C_{r+y}^r = \log_y x$$

$$\log_y z = 4 + \log_x z$$

$$C_{r+y}^y = \log_x z + \log_z z$$

onde C_m^p representa a combinação de m elementos tomados p a p e $\log_c B$ representa o logaritmo de B na base c .

Resolução

Condições de existência: $r \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}^*$ e $y \neq 1, x > 0$ e $x \neq 1, z > 0$ e $z \neq 1$

Temos que $C_{r+y}^r = C_{r+y}^y$, pois r e y são complementares.

$$\text{Igualando as combinações: } \begin{cases} \log_y z = 4 + \log_x z \\ \log_y x = \log_x z + 1 \end{cases}$$

Chamando $\log_y z = a$ e $\log_x z = b$, temos, $\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{b}$

Portanto, $\begin{cases} a = 4 + b \\ \frac{a}{b} = b + 1 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 4 + b \\ a = b^2 + b \end{cases}$

Igualando as equações, $4 + b = b^2 + b \Rightarrow b^2 = 4$

- $b = -2 \Rightarrow a = 2$ (Essa solução não convém, pois $\frac{a}{b} = C_{r+y}^r > 0$, já que é combinação simples de números naturais.)
- $b = 2 \Rightarrow a = 6$
 $\log_x z = 2 \Rightarrow x = \sqrt{z}$
 $\log_y z = 6 \Rightarrow z = y^6$

Assim, $C_{r+y}^r = \frac{a}{b} = 3 = C_3^1 = C_3^2$

Logo, $r = 1$ e $y = 2$ ou $r = 2$ e $y = 1$ (não convém, pois, pela CE, $y \neq 1$)

Portanto, $y = 2 \Rightarrow z = 64 \Rightarrow x = 8$

Assim, os valores de x, y, z e r são respectivamente: 8, 2, 64 e 1

- 6.** Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1.$$

Determine os valores destes ângulos (em radianos).

Resolução

Sejam os ângulos em PA: $\alpha - r, \alpha, \alpha + r$.

Assim, $\alpha - r + \alpha + \alpha + r = \pi \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

Tomando $\sin x + \cos x = t$, vem $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Na equação dada: $t \cdot \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 1 \therefore t^3 - 3t + 2 = 0$

Assim, temos, $t = 1$ (raiz dupla) e $t = -2$ (raiz simples)

Substituindo, vem:

Para $t = 1$: $\sin x \cdot \cos x = 0 \therefore 2 \sin x \cdot \cos x = 0 \therefore \sin 2x = 0 \therefore x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Como x é ângulo de um triângulo, então: $x = \frac{\pi}{2}$

Para $t = -2$: $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{3}{2} \therefore 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 3 \therefore \operatorname{sen} 2x = 3$ (não existe x)

Portanto, os ângulos são: $\boxed{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{\pi}{2}}$.

- 7.** Considere os pontos $A(-1,0)$ e $B(2,0)$ e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B . Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2 , determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0, \infty)$.

Resolução

O enunciado nos fornece duas situações possíveis, já que o centro P da circunferência pode estar no semiplano superior ou inferior. Por isto $P = (0, \pm R)$.

Sejam $\alpha = \angle PAO$ e $\beta = \angle PBO$, com $\{\alpha, \beta\} \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Temos, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{1} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot R}{1 - R^2} = -\frac{2R}{R^2 - 1}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cdot \left(\frac{R}{2}\right)}{1 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = -\frac{4R}{R^2 - 4}$$

Supondo r_1 e r_2 não verticais, temos o coeficiente angular de r_1 : $k_1 = \pm \operatorname{tg} 2\alpha$, e o de r_2 : $k_2 = \mp \operatorname{tg} 2\beta$.

Logo,

$$r_1: y = k_1(x + 1)$$

$$r_2: y = k_2(x - 2)$$

Se (x, y) é o ponto de intersecção, $x = \frac{2k_2 + k_1}{k_2 - k_1}$ e $y = \frac{3k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}, k_1 \neq k_2$

$$\text{Logo, } \frac{y}{x} = \frac{3k_1 \cdot k_2}{2k_2 + k_1}$$

Calculando o numerador e o denominador, tem-se:

$$3k_1 \cdot k_2 = 3 \cdot \left(\mp \frac{2R}{R^2 - 1}\right) \cdot \left(\pm \frac{4R}{R^2 - 4}\right) = -\frac{24R^2}{(R^2 - 4)(R^2 - 1)}$$

$$2k_2 + k_1 = 2 \cdot \left(\pm \frac{4R}{R^2 - 4}\right) + \left(\mp \frac{2R}{R^2 - 1}\right) = \pm \frac{6R^3}{(R^2 - 4)(R^2 - 1)}$$

Substituindo: $\frac{y}{x} = \mp \frac{4}{R} \Rightarrow y = \mp \frac{4}{R}x$, para a circunferência centrada em $(0, \pm R)$.

Mas ainda: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{y}{x+1}$ (I)

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{y}{2-x} \quad (\text{II})$$

Dividindo (I) por (II): $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\beta} = \frac{2-x}{x+1} = \frac{(R^2-4)}{2(R^2-1)}$

$$2 \cdot (2-x) \cdot R^2 - 2 \cdot (2-x) = (x+1) \cdot R^2 - 4 \cdot (x+1)$$

$$(3x-3) \cdot R^2 = 6x \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$$

Substituindo R na equação do LG:

$$y = \mp \frac{4}{\sqrt{\frac{2x}{x-1}}} \cdot x \Rightarrow \frac{2x}{x-1} \cdot y^2 = 16x^2$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 8x = y^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{2} = 1, x \neq 1 \text{ e } x \neq 0}$$

Se tomarmos uma das retas verticais, verificamos que o ponto de interseção (x, y) também satisfaz a equação acima. Dessa maneira, a equação do lugar geométrico descrito pela interseção de r_1 e r_2 ao

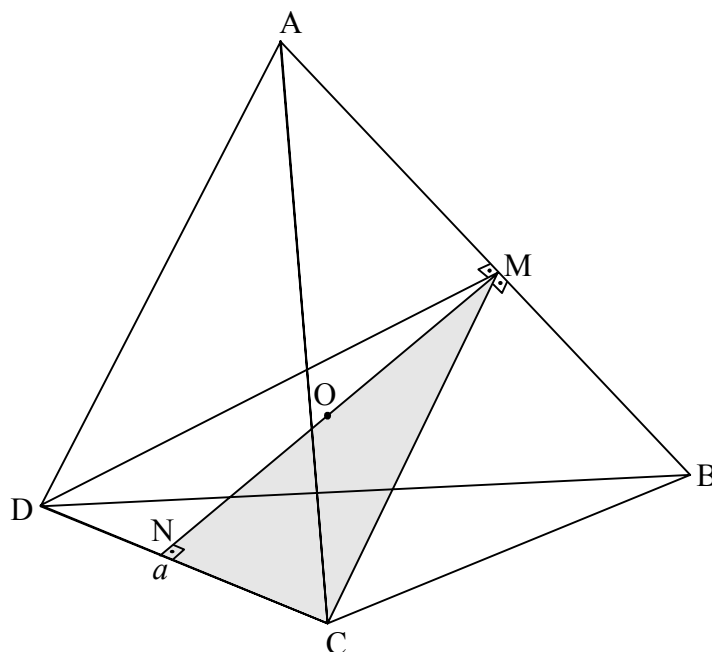
se variar R em $(0, +\infty)$ é $\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{2} = 1, x \neq 1 \text{ e } x \neq 0$, que se trata de uma hipérbole de centro

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, eixo transversal paralelo ao eixo das abscissas e valendo 1, eixo conjugado valendo $2\sqrt{2}$, e distância focal igual a 3.

- 8.** Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento a e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de a , calcule:
- o volume total da esfera;
 - o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

Resolução

- a) As arestas opostas do tetraedro regular são ortogonais e tangenciam a superfície da esfera do enunciado. Calcularemos inicialmente a distância entre as arestas ortogonais.



$$MC = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

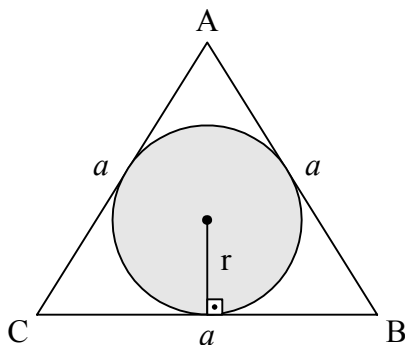
No triângulo retângulo MNC, temos $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (MN)^2 \therefore \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + (MN)^2 \therefore$

$$(MN)^2 = \frac{a^2}{2} \therefore MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$MN = 2R \therefore R = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ (O é o centro da esfera do enunciado)}$$

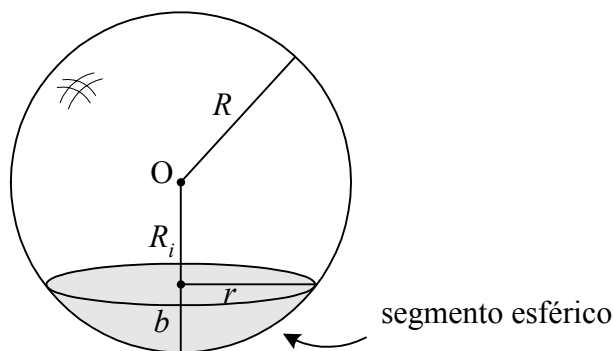
$$\text{O volume da esfera é } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \boxed{\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{24}}$$

- b) As partes da esfera – exteriores ao tetraedro – são segmentos esféricos de uma base. Os círculos inscritos nas faces do tetraedro são seções planas da esfera e bases dos segmentos esféricos.



$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

(r: raio da base do segmento esférico)



$$b = R - R_i$$

(R_i : raio da esfera inscrita no tetraedro)

$$\text{Temos que } R = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ e } R_i = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{Assim, } b = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

O volume do segmento esférico é dado por $V = \frac{\pi b}{6} \cdot (3r^2 + b^2)$.

$$\text{Assim, } V_{seg} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left[3 \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] = \frac{\pi a^3 \sqrt{2} (9 - 4\sqrt{3})}{432}$$

O volume procurado é a diferença entre o volume da esfera e o volume dos 4 segmentos esféricos. Assim,

$$V = \frac{\pi\sqrt{2}a^3}{24} - \frac{4\pi a^3 \sqrt{2} (9 - 4\sqrt{3})}{432} = \frac{\pi\sqrt{2}a^3}{24} - \frac{\pi a^3 \sqrt{2} (9 - 4\sqrt{3})}{108} = \boxed{\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{8}\right)}$$

9. Determine o conjunto solução $S = \{(x, y) | x \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ da equação

$$(x + y)k = xy$$

sabendo que k é um número primo.

Resolução

Procuremos uma expressão equivalente à dada: $(x + y) \cdot k = xy \therefore$

$$xk + yk - xy = 0 \therefore xk + yk - xy + k^2 - k^2 = 0 \therefore y(k - x) - k(k - x) + k^2 = 0 \therefore$$

$$(y - k)(k - x) = -k^2 \therefore (k - y) \cdot (k - x) = k^2.$$

Sendo k um número primo, os divisores de k^2 são ± 1 , $\pm k$ e $\pm k^2$.

Dos possíveis pares ordenados $(1; k^2)$; $(-1; -k^2)$; $(k^2; 1)$; $(-k^2; -1)$; $(k; k)$ e $(-k; -k)$, cujos elementos têm produto igual a k^2 , vêm os seguintes sistemas:

1. $\begin{cases} k - y = 1 \\ k - x = k^2 \end{cases} \therefore x = k - k^2 \text{ e } y = k - 1$
2. $\begin{cases} k - y = -1 \\ k - x = -k^2 \end{cases} \therefore x = k + k^2 \text{ e } y = k + 1$
3. $\begin{cases} k - y = k^2 \\ k - x = 1 \end{cases} \therefore x = k - 1 \text{ e } y = k - k^2$
4. $\begin{cases} k - y = -k^2 \\ k - x = -1 \end{cases} \therefore x = k + 1 \text{ e } y = k + k^2$

$$5. \begin{cases} k - y = k \\ k - x = k \end{cases} \therefore x = y = 0$$

$$6. \begin{cases} k - y = -k \\ k - x = -k \end{cases} \therefore x = y = 2k$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \{(0; 0), (2k; 2k), (k + 1; k + k^2), (k - 1; k - k^2), (k + k^2; k + 1), (k - k^2; k - 1)\}$$

10. Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots + C_n^{3[n/3]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n , sabendo que $[r]$ representa o maior inteiro menor ou igual ao número r .

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $(1 + \text{cis} \frac{2\pi}{3})^n$.

Resolução

Seja $w = \text{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right)$. Note que 1, w e w^2 são raízes da equação $x^3 = 1$.

Logo, $1 + w + w^2 = 0$ (pois é a soma das raízes).

$$\text{Se } k \in \mathbb{N}, w^k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{3} \\ w, & \text{se } k \equiv 1 \pmod{3} \\ w^2, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Aplicando o binômio de Newton para desenvolver $(1 + 1)^n$, $(1 + w)^n$ e $(1 + w^2)^n$, temos:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \quad [1]$$

$$(1 + w)^n = \binom{n}{0} + w \binom{n}{1} + w^2 \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + w^n \binom{n}{n} \quad [2]$$

$$(1 + w^2)^n = \binom{n}{0} + w^2 \binom{n}{1} + w \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + w^{2n} \binom{n}{n} \quad [3]$$

Somando as três equações:

$$3 \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots \right] = 2^n + (1 + w)^n + (1 + w^2)^n$$

Mas, temos:
$$\begin{cases} (1+w)^n = \text{cis}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\ (1+w^2)^n = \text{cis}\left(\frac{-n\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Assim, $3 \cdot S_0 = 2^n + \text{cis}\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \text{cis}\left(\frac{-n\pi}{3}\right) \Rightarrow S_0 = \frac{1}{3} \cdot \left[2^n + 2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right]$

Mas, temos:
$$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{6} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n \equiv \pm 1 \pmod{6} \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } n \equiv \pm 2 \pmod{6} \\ -1, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$$

Logo,
$$S_0 = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot (2^n + 2), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{6} \\ \frac{1}{3} \cdot (2^n + 1), & \text{se } n \equiv \pm 1 \pmod{6} \\ \frac{1}{3} \cdot (2^n - 1), & \text{se } n \equiv \pm 2 \pmod{6} \\ \frac{1}{3} \cdot (2^n - 2), & \text{se } n \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$$

Multiplicando [2] por w^2 e [3] por w , obtemos:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$w^2(1+w)^n = w^2 \binom{n}{0} + \binom{n}{1} w + \binom{n}{2} w^2 + \binom{n}{3} w^3 + \dots + w^{n+2} \binom{n}{n}$$

$$w(1+w^2)^n = w \binom{n}{0} + \binom{n}{1} w^2 + \binom{n}{2} w^3 + \binom{n}{3} w^4 + \dots + w^{2n+1} \binom{n}{n}$$

Somando as três equações:

$$3 \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots \right] = 2^n + w^2(1+w)^n + w(1+w^2)^n$$

Como, $w^2 = -(1+w)$ e $w = -(1+w^2) \therefore 3 \cdot S_1 = 2^n - (1+w)^{n+1} - (1+w^2)^{n+1}$

Mas, temos:
$$\begin{cases} (1+w)^{n+1} = \text{cis}\left[\frac{(n+1)\pi}{3}\right] \\ (1+w^2)^{n+1} = \text{cis}\left[-\frac{(n+1)\pi}{3}\right] \end{cases}$$

$$\text{Assim, } 3 \cdot S_1 = 2^n - \text{cis} \left[\frac{(n+1)\pi}{3} \right] - \text{cis} \left[-\frac{(n+1)\pi}{3} \right] \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} \left\{ 2^n - 2\cos \left[\frac{(n+1)\pi}{3} \right] \right\}$$

$$\text{Logo, } S_1 = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^n - 1), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{6} \text{ ou } n \equiv -2 \pmod{6} \\ \frac{1}{3}(2^n + 1), & \text{se } n \equiv 1 \pmod{6} \text{ ou } n \equiv 3 \pmod{6} \\ \frac{1}{3}(2^n + 2), & \text{se } n \equiv 2 \pmod{6} \\ \frac{1}{3}(2^n - 2), & \text{se } n \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}$$

Comentários

As questões de Matemática do exame do IME – 2006 são questões de bom nível, como convém às boas escolas. Cumpre observar que tais questões deveriam ser resolvidas num prazo de 4 horas. Isto parece dificultar um pouco a situação dos candidatos. Questões como a 7 e a 10, exigindo delicadas e longas manipulações algébricas, gastam boa parte desse tempo.

Por outro lado, questões como a 8 e a 9 exigem raciocínios rebuscados e alta dose de concentração. As questões 1 e 4 não são trabalhosas, assim como as questões 2, 3, 5 e 6, que podem ser consideradas mais fáceis em relação às outras. Em termos de abrangência a prova foi muito boa, pois, com apenas 10 questões, conseguiu avaliar o conhecimento de diversos conteúdos dos candidatos.

A prova de Matemática do IME continua se destacando pelo nível de excelência que caracteriza seus exames.

Parabéns aos examinadores e aos nossos alunos que certamente foram bem sucedidos.



POLIEDRO
O CURSINHO QUE MAIS ENTENDE DE IME E ITA